

渦動粘性項を考慮した運動量方程式による跳水部の水面形の近似解

京都大学 フェロー ○細田 尚
 京都大学 学生員 THIN THWE THWE
 Inst. de Agricultura Sostenible (Spain), Non-Member CASTRO-ORGAS, Oscar
 京都大学 正会員 音田慎一郎
 三洋テクノマリン 正会員 白井 秀和

1. はじめに

渦動粘性項を考慮した単純な運動量方程式には、不連続な跳水の水面形を表現する解析解が存在することが知られている[1]. 解析解は位置座標(x)が水深に関する三つの対数関数の和として表わされる. その解を鉛直加速度を考慮した運動量方程式(いわゆる Boussinesq 方程式原型)に適用して波状跳水の近似解を導出しようとする場合、跳水に対する基本解が $x = x(h)$ となっているため数学的な困難が発生する. そこで本研究では、基本解を $h = h(x)$ の形で表示される近似解に変換することについて考察する.

2. 運動量方程式と跳水部の水面形の解析解

図-1を参照して、渦動粘性項を考慮した単純な運動量方程式を記述すると式(1)となる.

$$\frac{d}{dx} \left(hU^2 + \frac{g}{2} h^2 \right) = \frac{d}{dx} \left(D_m h \frac{dU}{dx} \right) \quad (1)$$

ここに、 x は空間座標、 h は水深、 U は水深平均流速、 g は重力加速度、 D_m は渦動粘性係数を表す.

連続式は式(2)で与えられる. また渦動粘性係数の最も簡易な評価式として式(3)を用いる.

$$hU = q = \text{一定} \quad (2)$$

$$D_m = \alpha q \quad (3)$$

無次元変数 $x' = x/h_1$, $h' = h/h_1$ (h_1 は跳水の上流側の水深)を用いて運動量方程式を記述すると式(4)となる.

$$\frac{dh'}{dx'} = -A(h'-h_1')(h'-h_2')(h'-h_3'), \quad A = \frac{1}{2\alpha Fr_1^2} \quad (4) \quad h_1' = 1, h_2' = \left(\frac{\sqrt{1+8Fr_1^2} - 1}{2} \right), h_3' = \left(\frac{-\sqrt{1+8Fr_1^2} - 1}{2} \right) \quad (5)$$

式(4)を解くことにより解析解(6)を導くことができる[1].

$$a_1' \ln \left(\frac{h'-h_1'}{h_c'-h_1'} \right) + a_2' \ln \left(\frac{h'-h_2'}{h_c'-h_2'} \right) + a_3' \ln \left(\frac{h'-h_3'}{h_c'-h_3'} \right) = -A'(x'-x_c') \quad (6)$$

ここに $h_c = Fr_1^{2/3}$, x_c' は限界水深の位置を表すが本研究では 0 とおけばよい. また、 a_1', a_2', a_3', A' は次式で与えられる定数である.

$$a_1' = \frac{a_1}{b}, a_2' = \frac{a_2}{b}, a_3' = \frac{a_3}{b}, A' = \frac{A}{b} \quad (7)$$

$$a_1 = \frac{-1}{(h_1'-h_2')(h_3'-h_1')}, \quad a_2 = \frac{-1}{(h_1'-h_2')(h_2'-h_3')}, \quad a_3 = \frac{-1}{(h_2'-h_3')(h_3'-h_1')}, \quad b = (a_1 a_2 a_3)^{1/3} \quad (8)$$

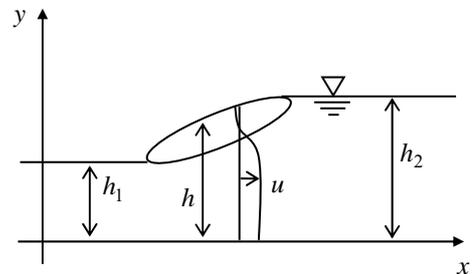


図-1 解析の座標系と記号の説明

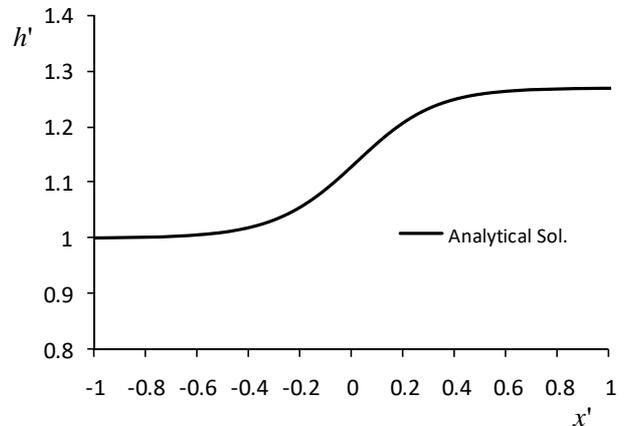


図-2 解析解の水深分布

$Fr_1 = 1.2, \alpha = 0.05$ として式(6)を計算した結果を図-2に示した. 共役水深の間で急激に変化する跳水状の水面形が再現されている.

キーワード 跳水, 水面形解析, 開水路水理学

連絡先 〒615-8540 京都市西京区京都大学桂 C1-3 号棟 京都大学工学研究科都市社会工学専攻 TEL075-383-3266

3. 運動量方程式の近似解の導出

式(6)は $x = x(h)$ の形をしており, 例えば Boussinesq 方程式を用いた波状跳水の理論的な考察[2]に用いることが困難である. そこで本研究では $h = h(x)$ の形を有する基礎式の近似解を導出する. 以後, 無次元量を表す'を省略する.

式(9)に示すように水深 h を限界水深 $h_c = Fr_1^{2/3}$ とそれからの偏差に分け, 偏差に関する近似解を導く. 式(9)を式(4)に代入して δh に関する関係式を導くと式(10)となる.

$$h = h_c + \delta h \tag{9} \quad \frac{d \delta h}{dx} = D_0 + D_1 \delta h + D_2 \delta h^2 + D_3 \delta h^3 \tag{10}$$

ここに, D_0, D_1, D_2, D_3 は次式で与えられる.

$$D_0 = \frac{1}{\alpha} \left\{ Fr_1^{2/3} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{1}{Fr_1^2} \right) - \frac{3}{2} \right\}, D_1 = \frac{1}{\alpha} \left\{ -\frac{3}{2} \frac{1}{Fr_1^{2/3}} + \frac{1}{2} \frac{1}{Fr_1^2} + 1 \right\}, D_2 = -\frac{1}{\alpha} \frac{3}{2} \frac{1}{Fr_1^{4/3}}, D_3 = -\frac{1}{\alpha} \frac{1}{2} \frac{1}{Fr_1^2} \tag{11}$$

限界水深の発生位置を原点 ($x = 0$) として, まず x が負の領域(水深が限界水深より小さい.)を考える. δh を式(12)として近似する.

$$\delta h = P_0 + P_1 \exp(\beta_1 x) + P_2 \exp(2\beta_1 x) + \dots \tag{12}$$

$x = 0$ と $x \rightarrow -\infty$ における境界条件は次式で与えられる.

$$x = 0: \delta h = P_0 + P_1 + P_2 = 0, \quad x \rightarrow -\infty: P_0 = 1 - Fr_1^{2/3} \tag{13}$$

$x \rightarrow -\infty$ における $d\delta h/dx \rightarrow 0$ の条件は自動的に満足される. また, 式(10)に $\delta h = 0$ を代入した式と, 式(12)を x に関して一回微分し $x = 0$ を代入した式を等値すると, 原点での一階微分に関する式(14)が得られる.

$$D_0 = \beta_1 P_1 + 2\beta_1 P_2 \tag{14}$$

式(10)を x に関して微分し, その式の右辺に式(10)を代入すると二階微分に関する関係式が導かれる. その式に $\delta h = 0$ を代入すると, $x = 0$ での二階微分の関係式となる. 式(12)から得られる同様の式と等値すると式(15)となる.

$$D_0 D_1 = \beta_1^2 P_1 + 4\beta_1^2 P_2 \tag{15}$$

式(14), (15)と式(13)を連立することで, β_1, P_1, P_2 を計算することができる. $Fr_1 = 1.2, \alpha = 0.05$ として実際に計算した結果を図-3 に示した. 図中には解析解も示してあるが, 両者はよく一致していることが分かる.

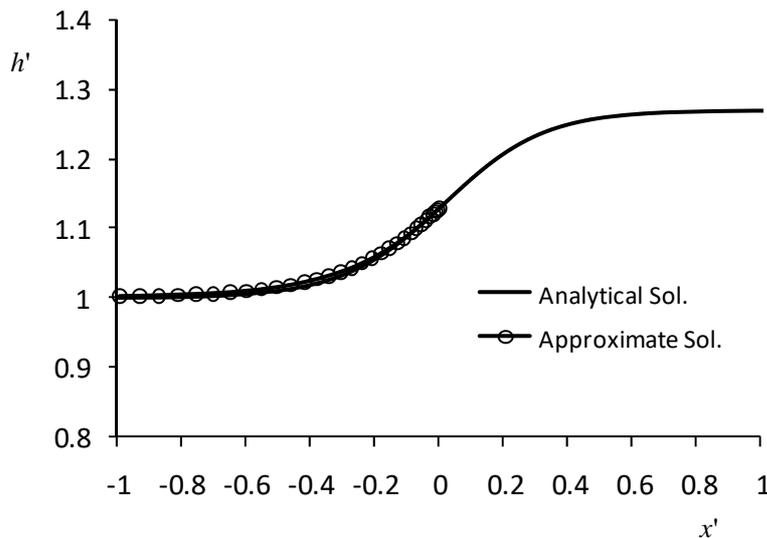


図-3 解析解と近似解の比較

4. おわりに

本研究では負の領域の近似解のみ導いたが, 今後正の領域の近似解も導出したい. さらに得られた近似解の Boussinesq 方程式への適用を検討したい.

参考文献 [1] 細田 尚・Langhi, M., 簡易な水深積分モデルによる跳水部の水面形の再現解析について, 土木学会水工学論文集, 第57巻, 2013. [2] 細田 尚・多田彰秀, 鉛直加速度を考慮した基礎式系による開水路流れ定在波の水面形解析, 水工学論文集 第38巻, pp.457-462, 1994.