

STRIP 法における初項 ($n=0$) についての一考察

(株) 井 沢 設 計 正会員 ○廣瀬 清泰
大阪工業大学名誉教授 正会員 堀川都志雄

1. はしがき

著者らは自由辺を有する版の級数解法に際して、特解には厚板理論から導かれる全周単純支持された Navier タイプの解を用い、境界条件を満たす同次解に薄板理論の Levy 解を組み合わせる混合法を基本に置き、計算手法として一方向を調和解析法に、他方向を選点法とする STRIP 法による計算例を示した¹⁾。座標原点を版の中央線に一致させることにより、外荷重や境界条件の対称性を考慮して一般解を対称モードと逆対称モードに分離すれば、同次解での積分定数の決定は容易になるが、逆対称モードの解については、初項 ($n=0$) の処理が課題になると言われている。

本研究では初項 ($n=0$) に着目し、全周単純支持版の版厚が変化する 3 層版の計算例を示す。

2. 変位関数による一般解の級数展開

厚板理論の混合法は全周単純支持される厚板解を特解とし、境界条件を満足させるための同次解に薄板理論を用い、これらを組み合わせることで誘導される。

x 軸方向の端辺が単純支持で、 y 軸方向の端辺が自由である矩形版を考える(図-1)。

1) 特解 3次元弾性論における変位関数 f_3 と θ_3 の基礎式は式(1)で与えられる。

$$\Delta \Delta f_3 = 0, \quad \Delta \theta_3 = 0 \quad (1)$$

ここで、 Δ : 3次元ラプラシアン、上添字 p は特解を意味する。
変位関数と x, y, z 方向の変位 u, v, w との関係式を式(2)に示す。

$$\begin{aligned} 2\mu u^p &= -\partial_x \partial_z f_3 + \partial_y \theta_3, \quad 2\mu v^p = -\partial_y \partial_z f_3 - \partial_x \theta_3, \\ 2\mu w^p &= \mu/(\lambda + \mu) [\partial_z^2 + (\lambda + 2\mu)(\partial_x^2 + \partial_y^2)/\mu] f_3 \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、 λ, μ : ラメの定数,

$$\partial_x^2 = \partial^2 / \partial x^2, \quad \partial_y^2 = \partial^2 / \partial y^2, \quad \partial_z^2 = \partial^2 / \partial z^2$$

2) 同次解 曲げ問題と引張り問題に分離される同次解のたわみ w^h と 2次元弾性体の変位関数 ϕ^h の基礎式は式(3)より求められる。上添字 h は同次解を示す。

$$D \Delta' \Delta' w^h = 0, \quad H \Delta' \Delta' \phi^h = 0 \quad (3)$$

ここで、 Δ' : 2次元ラプラシアン、 D : 版の曲げ剛性、 H : 版の伸び剛性、
同次解での変位 u^h や v^h はたわみと変位関数の関係から得られる。

$$u^h = u_s^h - z \partial_x w^h, \quad v^h = v_s^h - z \partial_y w^h \quad (4)$$

ここで、 $u_s^h = [\partial_x^2 + 4(\lambda + \mu)/(\lambda + 2\mu)\partial_y^2] \phi^h$, $v_s^h = -(3\lambda + 2\mu)/(\lambda + 2\mu) \partial_x \partial_y \phi^h$

変位関数 f_3 と θ_3 , および関数 w^h と ϕ^h は、図-1 の中央線 ($y = 0$) に関して対称形モードと逆対称形モードの関数群に分類される。紙面の都合上、以下では逆対称モードに限定する。

逆対称モードでの変位関数は式(5)のように級数表現できる。

$$\begin{aligned} f_3 &= \sum \sum [C_1 \operatorname{ch} \gamma z + C_2 \operatorname{sh} \gamma z + C_3 \gamma z \operatorname{ch} \gamma z + C_4 \gamma z \operatorname{sh} \gamma z] \sin \alpha_m x \sin \beta_n y, \\ \theta_3 &= \sum \sum [C_5 \operatorname{ch} \gamma z + C_6 \operatorname{sh} \gamma z] \cos \alpha_m x \cos \beta_n y + \sum [C_5^0 \operatorname{ch} \gamma' z + C_6^0 \operatorname{sh} \gamma' z] \cos \alpha_m x, \\ w^h &= \sum [B_m \operatorname{sh} \alpha_m y + C_m \alpha_m y \operatorname{ch} \alpha_m y] \sin \alpha_m x \\ &\quad + \sum [B_m^0 \operatorname{sh} \alpha_m y + C_m^0 \alpha_m y \operatorname{ch} \alpha_m y] \sin \alpha_m x, \end{aligned}$$

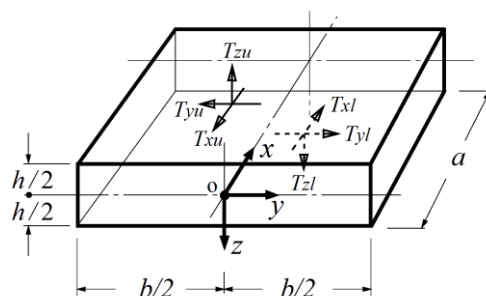


図-1 各層の座標および形状

キーワード STRIP 法, 変厚多層版, 逆対称モード, 初項

連絡先 〒581-0019 大阪府八尾市南小阪合町 5-8-30 株式会社 井沢設計 TEL072-998-2723 FAX072-998-2768

$$\phi^h = \sum [J_m \operatorname{sh} \alpha_m y + K_m \alpha_m y \operatorname{ch} \alpha_m y] \cos \alpha_m x + \sum [J_m^0 \operatorname{sh} \alpha_m y + K_m^0 \alpha_m y \operatorname{ch} \alpha_m y] \cos \alpha_m x \quad (5)$$

ここで, $\alpha_m = m\pi/a$ ($m = 1, 2, 3, \dots$), $\beta_n = 2n\pi/b$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)

$\gamma^2 = \alpha_m^2 + \beta_n^2$, $\operatorname{ch} \gamma z = \cosh \gamma z$, $\operatorname{sh} \gamma z = \sinh \gamma z$, $\gamma' = \alpha_m$, $\operatorname{ch} \gamma' z = \cosh \gamma' z$, $\operatorname{sh} \gamma' z = \sinh \gamma' z$,

$C_1 \sim C_6$: 版の上下面から決定される積分定数, $C_5^0 \sim C_6^0$: 初項 $n=0$ での版の上下面から決定される積分定数,

B_m, C_m, J_m, K_m : 端辺の境界条件から決定される積分定数,

$B_m^0, C_m^0, J_m^0, K_m^0$: 初項での端辺の境界条件から決定される積分定数

下線部は初項による影響項を示す.

3. 初項を含めた数値計算例

最上層のみが全周単純支持され, 等分布満載荷重 q が最上面に作用する等厚 3 層版を対象に, 中間層と最下層は x 方向の対辺と $y=0$ の辺が単純支持で, 残りの辺が自由であり, かつ y 方向の辺長が変化する場合を考える(図-2). 全層が全周単純支持の Navier タイプの解を Type-1, Type-2 の辺長を $0.75a$ とする. 区割り数は 30 で, 級数の項数は m, n とも 100 である. それぞれの Type から算出される最上面(u)と最下面(l)での結果を表-1 に比較する.

接合界面に作用するせん断応力 τ_{yz} の比較を表-2 に表す.

4. あとがき

初項は逆対称モードでの重要な役割を担っていると推察される. 詳細は当日発表する.

参考文献

- 1) 廣瀬清泰, 鍋島益弘, 堀川都志雄: 急変する版厚を有する張出し多層版の STRIP 法による数値解析, 第八回道路橋床版シンポジウム, pp. 3-8, 2014.

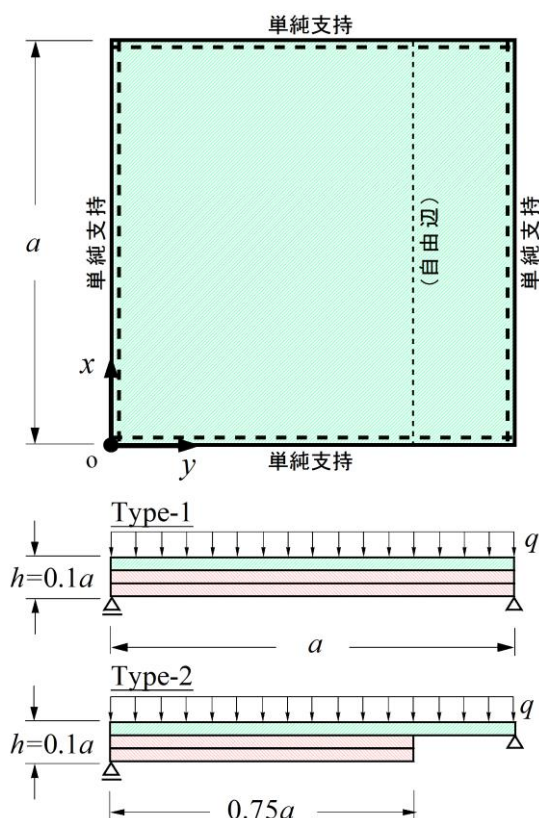


図-2 等厚 3 層版モデル

表-1 各 Type での変位 w , 応力 σ_x と σ_y の比較 ($x/a=0.5$)

座 標	$y/a=0.25$		$y/a=0.50$		$y/a=0.75$	
項 目	$w^u E/qa$	$w^l E/qa$	$w^u E/qa$	$w^l E/qa$	$w^u E/qa$	$w^l E/qa$
Type-1	33.38	33.34	46.02	45.97	33.38	33.34
Type-2	51.56	51.56	91.14	91.21	125.0	126.7
項 目	σ_x^u/q	σ_x^l/q	σ_x^u/q	σ_x^l/q	σ_x^u/q	σ_x^l/q
Type-1	-21.68	21.40	-29.00	28.86	-21.68	21.40
Type-2	-28.77	29.51	-45.34	49.88	-70.62	62.60
項 目	σ_y^u/q	σ_y^l/q	σ_y^u/q	σ_y^l/q	σ_y^u/q	σ_y^l/q
Type-1	-23.50	23.47	-28.99	28.85	-23.50	23.47
Type-2	-17.95	20.18	-16.42	20.24	-83.84	0.0

表-2 各 Type での応力 τ_{yz} の比較 ($x/a=0.5$)

座 標	$y/a=0.25$		$y/a=0.50$		$y/a=0.75$	
項 目	上側界面	下側界面	上側界面	下側界面	上側界面	下側界面
Type-1	1.818	1.818	0.0	0.0	-1.818	-1.818
Type-2	2.038	2.071	0.427	0.493	—	-0.924

注) Type-2 の $y/a=0.75$ での上側界面位置は特異点を示す.