

弾性体の3次元自由振動問題における有限要素法のモード分解能の調査

長岡技術科学大学 学生会員 佐藤 弘 弥
大分工業高等専門学校 学生会員 藤 元 光 明
明石工業高等専門学校 正 会 員 石 丸 和 宏

大分工業高等専門学校 学生会員 山 本 寧 音
大分工業高等専門学校 正 会 員 ○名 木 野 晴 暢

1. まえがき

衝撃的な外力の作用による構造物内部の応力波伝播現象をできるだけ正確に評価するためには、動弾性論に基づく弾性体の運動方程式(波動方程式)を高精度に解かなければならない。

さて、3次元動弾性論に基づく運動方程式の解 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ は、次のように仮定できる¹⁾。

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}^s(\mathbf{x}, t) + \sum_{l=1}^{\infty} \mathbf{U}_l(\mathbf{x}) Q_l(t) \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{u}^s(\mathbf{x}, t)$ は準静的解、 $\mathbf{U}_l(\mathbf{x})$ は l 次の固有関数(固有振動モード)であり、 $Q_l(t)$ は時間関数(基準座標)である。対象とする外力にもよるが、 $Q_l(t)$ は Duhamel 積分により解析的に求めることができる。よって、この $\mathbf{U}_l(\mathbf{x})$ と、その $\mathbf{x}$ に関する1階導関数を高次の l まで精度良く求められれば、構造物内部の応力波の伝播を正確に評価することができることになる。

通常、運動方程式の空間方向の離散化には、有限要素法が用いられるが、波長が短くなると解析精度を確保するために密な要素分割が必要になる。よって、有限要素法による応力波伝播の精度を評価するためには、その空間方向の分解能(モード分解能)を把握しておくことが重要になる。

本研究の目的は、衝撃荷重が作用する板部材の応力波伝播問題を例に取り、板部材の3次元自由振動問題における有限要素法のモード分解能を把握することである。本研究では、解析解を得ることができる周面単純支持された矩形の線形弾性体を対象とし、解析解を正解とすることで有限要素法により求められる固有値(固有円振動数)と、その固有関数(固有振動モード)の解析精度を調べた。

2. 数値実験モデルと有限要素解析の離散化条件

図-1のように長さ a 、幅 b 、高さ h を有する等質・等方な矩形の線形弾性体と直交座標系を設定した3次

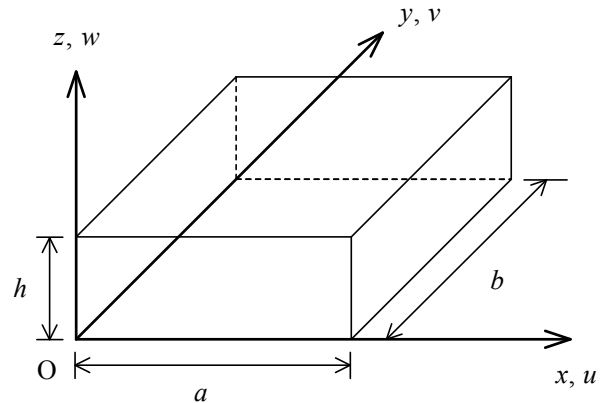


図-1 弾性体と直交座標系

元動弾性問題を考える。ここで、 u, v, w は、それぞれ、 x, y, z 方向の変位成分である。弾性体の上下面($z=h, 0$)は自由面とし、周面($x=0, a$ および $y=0, b$)は単純支持されているとする。

有限要素解析には、汎用コード ANSYS 15.0 を用いた。6面体要素のモード分解能(変形性能)を考察するために、8節点(双)1次要素(SOLID185)と20節点2次要素(SOLID186)を使用し、要素が立方体になるように分割した。なお、要素分割数は、 $m_x \times m_y \times m_z$ で表す。ここで、 m_x, m_y, m_z は、それぞれ、 x, y, z 方向の要素分割数を意味する。

3. 数値実験および考察

数値実験では中等厚板を想定し、厚さー長さ比 $h/a = 0.1$ 、幅ー長さ比 $b/a = 1$ 、ポアソン比 $\nu = 0.3$ を用いた。有限要素法による固有円振動数 Ω の精度を評価するために、本研究では、解析解 (Analytical) に対する有限要素解 (FEM) の相対誤差を次のように定義した。

$$\text{Error} [\%] = \frac{\Omega_{\text{FEM}} - \Omega_{\text{Analytical}}}{\Omega_{\text{Analytical}}} \times 100 \quad (2)$$

周面単純支持された矩形弾性体の3次元自由振動問題は、解析的に解くことができる¹⁾。その自由振動は、[1] 面内変位 u, v のみによる面内振動と、[2] 面内変位 u, v と面外変位 w が連成する面外振動に大別され、厚

キーワード 弾性体、モード分解能、動弾性論、有限要素法、解析解

連絡先 〒870-0152 大分市大字牧 1666 番地 大分工業高等専門学校 TEL: 097-552-7691

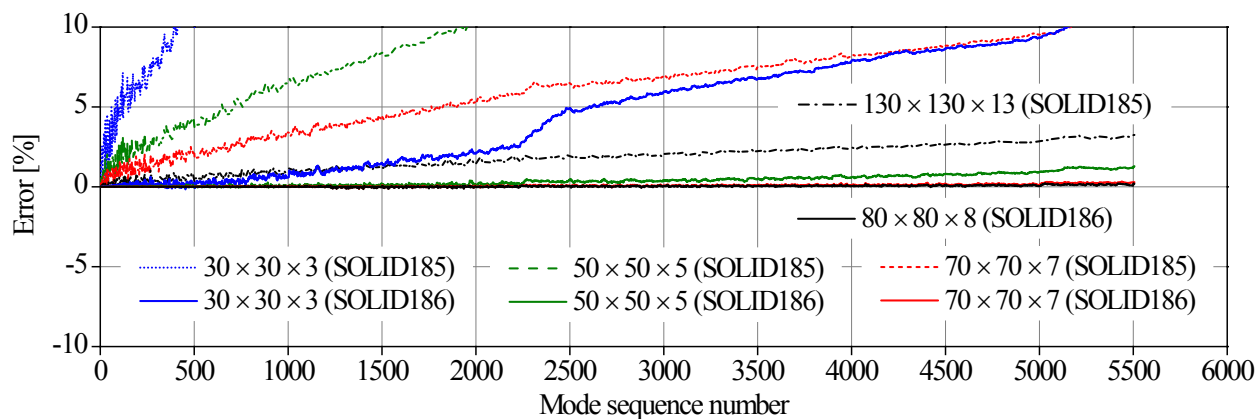


図-2 面外振動の固有円振動数の相対誤差に与える要素分割数 $m_x \times m_y \times m_z$ と要素タイプの影響

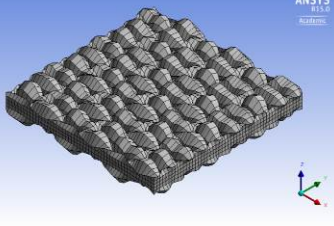
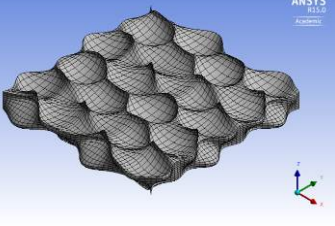
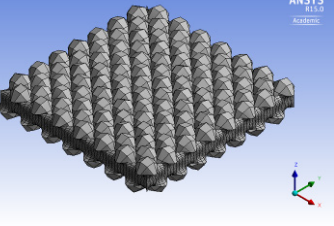
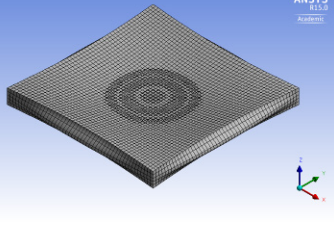
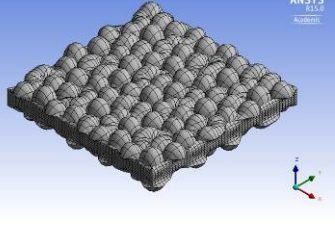
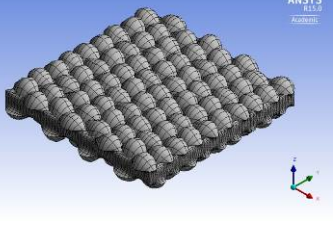
	50 × 50 × 5	50 × 50 × 10	50 × 50 × 15
SOLID185	 Error = 4.74 %	 Error = 3.91 %	 Error = 3.71 %
SOLID186	 Error = 0.04 %	 Error = 0.02 %	 Error = 0.02 %

図-3 面外基本振動の厚さ方向 6 次モードに与える厚さ方向の要素分割数 m_z と要素タイプの影響

さ方向にも波数が存在する． $h/a = 0.1$ である矩形弾性体の 1 次から 10,000 次までの自由振動の内，面内振動は 4,494 個，面外振動は 5,506 個である．面外振動のみを対象として固有円振動数の相対誤差に与える要素分割数と要素タイプの影響を纏めたものが図-2 である．これより，要素タイプに関わらず，要素分割数を増大させると，相対誤差は小さくなる．また，SOLID186 の $m_x \times m_y \times m_z = 80 \times 80 \times 8$ （自由度数 684,531）の結果は，5500 次程度までの固有円振動数を相対誤差 0.2 % 以下の精度で計算できている．

次に，固有振動モードの解析精度を検証した一例として，面外基本振動の厚さ方向 6 次モードに与える m_z と要素タイプの影響を図-3 に示す．ここでは，解析精度に与える m_z の影響を調べるために， $m_x \times m_y = 50 \times 50$ に固定して， m_z を 5（要素の aspect 比が 1）から 15（要素の aspect 比が 3）まで変化させた．SOLID186 の結果に着目すると，aspect 比が 1 のときに固有円振動数の相対誤差が 0.04 % という高い精度が得られて

おり，固有振動モードも正しく計算されている．しかし，厚さ方向の波数を精度良く近似する目的で m_z を大きくすると，固有円振動数の相対誤差は 0.02 % の精度に改善されているのに関わらず，正解とは異なる固有振動モードが計算されている．

4. まとめ

- (1) 2 次要素を用いて aspect 比が 1 になるように要素分割すれば，5500 次程度までの面外振動の固有円振動数を相対誤差 0.2 % 以下の精度で計算できる．
- (2) 固有円振動数は良好な精度で計算されていても，要素の aspect 比によっては正解とは異なる固有振動モードが計算されてしまうことがある．

謝辞：本研究の一部は，公益社団法人 LIXIL 住生活財団 2016 年度調査研究助成を受けて行われています．

参考文献

- 1) Lee and Reismann: Int. J. Eng. Sci. 7, pp.93-113, 1969.