Cyclic densification を用いたバラスト道床沈下解析における構成材の弾性挙動の空間変動の影響評価解析法

新潟大学大学院自然科学研究科　学生員　井口 建斗
新潟大学工学部　正会員　紅露 一寛

1. はじめに

現在，国内外の鉄道路線では，輪重衝撃緩和と排水性の確保のために，砕石を敷き詰めたバラスト道床が広く用いられている．このバラスト道床は，列車の走行に伴う繰り返し荷重の作用により道床沈下を引き起こす．そのため，道床沈下量の定量評価が試みられており，当研究室ではバラスト材の単調載荷挙動を cyclic densification モデルで表現した場合の Young 率の空間変動を考慮した沈下量の評価を試みてきた[1)]．しかし，解析手法の定式化に用いられる Karhunen-Loeve(KL) 展開と polynomial chaos(PC) 展開の項数の設定が，不確実性を考慮した弾塑性解析結果に及ぼす影響は未検討である．また，繰り返し載荷時の弾塑性解析結果に及ぼす Young 率の空間変動の影響も明らかでない．そこで，本研究ではこれらの未検討課題に取り組む．

2. Cyclic densification モデル

Cyclic densification モデル[2)]は，単調載荷モデルと繰り返し載荷モデルにより構成される．単調載荷モデルは，次式の構成則を出発点に，修正 Drucker-Prager モデルにより弾塑性挙動を表現する．

$$\dot{\sigma}_{ij} = D_{ijkl}(\dot{\epsilon}_{kl} - \dot{\epsilon}^p_{kl}) \tag{1}$$

ここで，σ_{ij} を応力，D_{ijkl} を Young 率 E について線形である弾性定数テンソル，ϵ_{kl} を全ひずみ，ϵ^p_{kl} を塑性ひずみとして，降伏条件は次の 3 種類で与える．

$$f^f(q, p, \kappa^p_0) = -\frac{q}{p - p^t_{num}} - H^f(\kappa^p_0) = 0 \tag{2}$$

$$f^c(p, \epsilon^p_{vol,c,0}) = -\frac{p}{p_0} - H^c(\epsilon^p_{vol,c,0}) = 0 \tag{3}$$

$$f^t(p) = p - p^t = 0 \tag{4}$$

ここで，$p = \sigma_{kk}/3$，$q = \sqrt{\frac{3}{2}(S_{ij}S_{ij})}$，$S_{ij} = \sigma_{ij} - p\delta_{ij}$ であり，κ^p_0，$\epsilon^p_{vol,c,0}$ は塑性定数であり，H^f，H^c は硬化関数である．一方，繰り返し載荷モデルは履歴変数をサイクル数 N とした次式の亜弾性構成則を出発点とする．

$$\frac{d\sigma_{ij}}{dN} = D_{ijkl}\left(\frac{d\epsilon_{kl}}{dN} - \frac{d\epsilon^p_{kl}}{dN}\right) \tag{5}$$

繰り返し載荷モデルは Perzyna の超過応力の概念に基づき，塑性定数の発展則を次式で与える．

$$\frac{d\kappa^p}{dN} = \alpha^f \left(-\frac{q}{p - p^t_{num}} - h^f_{sh}(\kappa^p)\right)^{\gamma^f}_{+} \tag{6}$$

$$\frac{d\epsilon^p_{vol,c}}{dN} = \alpha^c \left(\frac{p}{p_0} - h^c_{sh}(\epsilon^p_{vol,c,0})\right)^{\gamma^c}_{+} \tag{7}$$

ここで，h^f_{sh}，h^c_{sh} は硬化関数である．なお，単調載荷モデル，繰り返し載荷モデルとも，塑性流動則には非関連流動則を採用する．

3. Young 率の空間変動を考慮したスペクトル確率有限要素法

本研究では，構成材料の Young 率 E について，その値の確率論的な空間変動がバラスト道床弾塑性有限要素解析結果に及ぼす影響について考える．この変動の影響を評価するために，Anders らが提案したスペクトル確率有限要素法[3)]を用いる．文献 3) で用いられる bounding body 近似では，応力 $\boldsymbol{\sigma}^{\pm}$ は全ひずみ増分の期待値をもとに決定論的な物理量として定義される．これにより，当該の準静的つり合い問題の有限要素法において，Newton-Raphson(N-R) 反復で解く代数方程式は次式で与えられる．

$$[{}^{j-1}\mathbf{K}_i(E(\omega), {}^{j-1}\boldsymbol{\sigma}^{\pm}_i)]\{{}^{j}\Delta\mathbf{U}_i(\omega)\} = \{\mathbf{F}^{ext}_i\} - \{{}^{j-1}\mathbf{F}^{int}_i(\omega)\} \tag{8}$$

式中の内力ベクトル $\{{}^{j-1}\mathbf{F}^{int}_i\}$ は，その期待値によって近似する．

式 (8) を確率空間で離散化するために，以下に示すように E には Karhunen-Loeve 展開，$\{{}^{j}\Delta\mathbf{U}_i\}$ には polynomial chaos 展開をそれぞれ適用する．[3)]

$$E = \langle E \rangle (1 + \sum_{l=1}^{M} \xi_m \sqrt{\lambda_m}\phi_m) \tag{9}$$

$$\{{}^{j}\Delta\mathbf{U}_i\} = \sum_{l=0}^{L-1} \{{}^{j}\Delta\mathbf{U}^{(l)}_i\}\Psi_l(\xi) \tag{10}$$

ここで，$\langle E \rangle$ は E の期待値，ξ_m は標準正規分布に従う確率変数，λ_m, ϕ_m は共分散関数 C の固有値，固有関数である．また，Ψ_l は正規化された polynomial chaos であり，M，L はそれぞれ KL 展開，PC 展開の展開項数である．最後に，Ψ_l を重みとした確率空間での Galerkin 法を適用することで，各増分ステップ · 各 N-R 反復で解く連立 1 次方程式を得る．

表 1 材料パラメータの設定値

E	88MPa	p_0	-20kPa
ρ	1.8×10^3kg/m^3	ν	0.17
p^t_{num}	10kPa	α^f	1.0×10^{-5}
α^c	0.2×10^{-5}	γ^f	2.5
γ^c	2.0		

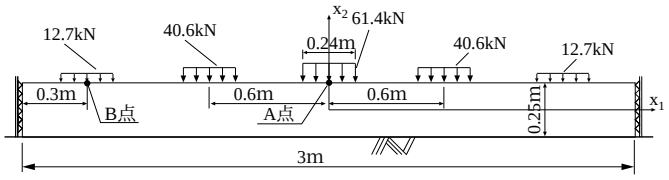

図 1 解析領域

4. 解析結果

まず，単調載荷時を対象に，KL 展開・PC 展開の項数 M, L の設定が解析結果に及ぼす影響について検討する．

解析では**図-1** に示すバラスト軌道を模擬した解析領域を考える． 材料の物性値は，**表-1** に示す値に設定し，Young 率の空間変動成分の共分散関数 C は次式で与えることとした．

$$C(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) = \delta_E^2 \exp\Big(-\frac{|\xi_1 - x_1|}{b_1} - \frac{|\xi_2 - x_2|}{b_2}\Big) \qquad (11)$$

なお，Young 率の変動係数は $\delta_E = \sigma_E / \langle E \rangle$ で与え，σ_E は Young 率の標準偏差，b_1，b_2 はそれぞれ x_1 軸，x_2 軸方向の相関長さである．

上記の条件下で Young 率 E の変動係数 $\delta_E = 10\%$，相関長さ $b = b_1 = b_2 = 1(\mathrm{m})$ とした場合において，M・L の設定の影響を検討する．**図-2** から**図-4** に領域中央の A 点における荷重-変位曲線を示す．**図-2** は基準とする $M = 4$, $L = 5$ の結果である．また，**図-3** は $M = 9$ とした結果であり，**図-4** は $L = 15$ とした結果である．変位は下向きを正とし，図中の実線は変位の期待値，点線は期待値 ± 標準偏差を表す．

まず KL 展開項数の設定の影響について，**図-2** と**図-3** を比較して検討する．その結果，載荷初期段階の弾性応答が卓越する段階から，載荷重の増加によって塑性応答が発生する段階まで期待値・標準偏差は KL 展開の設定によってさほど変化せず．両者の差は 5% 以下となった．一方，PC 展開項数の設定の影響については，**図-2** と**図-4** を比較すると，こちらも設定値の違いによる差は応答値の 1% 以下と，ほとんどないことがわかった．このことは載荷重最大時における A 点の鉛直変位の確率密度関数からもわかる．$M = 4$ としたうえで，$L = 5$ または $L = 15$ としたときの確率密度関数を**図-5**，**図-6** に示す．両者の差はほとんどなく，確率密度関数の形状も概ね正規分布をみせることがわかった．

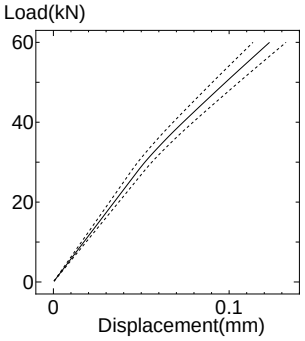

図 2 $M = 4$, $L = 5$ の場合の荷重・変位曲線

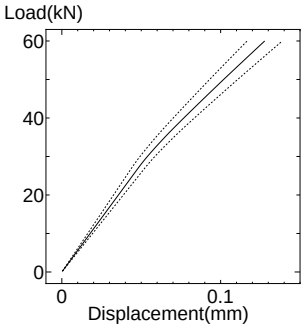

図 3 $M = 9$, $L = 5$ の場合の荷重・変位曲線

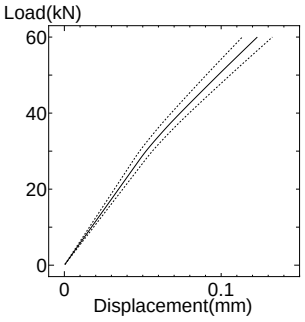

図 4 $M = 4$, $L = 15$ の場合の荷重・変位曲線

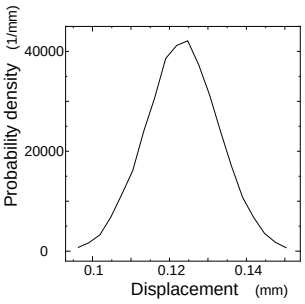

図 5 $M = 4$, $L = 5$ の場合の確率密度関数

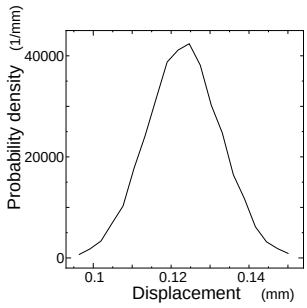

図 6 $M = 4$, $L = 15$ の場合の確率密度関数

このことから，当該の解析では，KL 展開・PC 展開の項数はさほど大きく設定しなくても良いことがわかった．

なお，繰り返し載荷解析時の検討結果については，発表会当日に示すこととしたい．

謝辞

本研究は JSPS 科研費 15K06177 の助成を受けたものです．

参考文献

1) 井口建斗，紅露一寛，阿部和久:単調載荷時のバラスト道床の弾塑性有限要素解析結果におけるバラスト材の Young 率の空間変動の影響, 土木学会第 71 回年次学術講演概要集，CS8-024, 2016.
2) A.S.J.Suiker,R.D.Borst: A numerical model for the cyclic densification of railway tracks, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.57, pp.441-470, 2003.
3) Anders,M.& Hori,M.: Stochastic finite element method for elasto-plastic body, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.46, pp.1897-1916, 1999.