

確率的降伏を考慮した非線形スペクトル確率有限要素法の提案

大成建設(株) 正会員○羽場 一基 正会員 堀田 渉 正会員 畑 明仁
正会員 鈴木 俊一 正会員 渡辺 和明
東京大学 正会員 堀 宗朗

1. はじめに

原子力発電所を対象とした確率論的安全評価の導入が進む中、地盤物性の不確実性の取り扱いが重要な課題である。このような不確実性を合理的に評価する手法の一つに、スペクトル確率有限要素法¹⁾(以下、SSFEM)がある。しかし、SSFEMに関する検討の多くが弾性問題であり、数少ない非線形SSFEMの検討²⁾でも材料の降伏過程は決定論的に取り扱われている。

そこで筆者らは、確率的な降伏を効率的に評価するスペクトル確率リターンマッピングアルゴリズム(以下、SSRMA)を提案した³⁾。本稿では、このSSRMAを用いた非線形SSFEMを提案する。

2. 線形SSFEMの概要

SSFEMは、確率変数をKarhunen-Loeve展開(以下、KL展開)とPolynomial Chaos展開(以下、PC展開)を用いて展開し、その展開係数を有限要素法により評価する手法である。SSFEMではこの展開を用いることで、物性場の空間的相関と応答場の複雑な確率分布を考慮した確率過程を一度の計算で評価できる。

KL展開は空間的相関を表現するための展開であり、入力物性場に適用する。例えば、ヤング率 E が正規分布に従う場合、 E は期待値 $\langle E \rangle$ と独立な正規分布確率変数 $\xi_i(\omega)$ (期待値0で分散1)によって展開される。

$$E(\mathbf{x}, \omega) = \langle E(\mathbf{x}) \rangle + \sum_{i=1}^M E_i(\mathbf{x}) \xi_i(\omega) \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{x}$ は空間座標、 ω は標本空間の標本点であり、 E_i は共分散関数に対する固有関数である。

PC展開は複雑な確率分布を表現するための展開であり、応答場に適用する。例えば、変位 $\mathbf{u}$ はKL展開の正規確率変数 $\xi_i(\omega)$ のHermite多項式により展開される。

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) = \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}) \rangle + \sum_{n=1}^P \mathbf{u}_n(\mathbf{x}) \Psi_n(\{\xi(\omega)\}) \quad (2)$$

式(2)の第二項はHermite多項式の定義より、 $\sum_{n=1}^P \mathbf{u}_n(\mathbf{x}) \Psi_n(\{\xi(\omega)\}) = \sum_{i=1}^M \mathbf{u}_i(\mathbf{x}) \xi_i(\omega) + O(\xi^2)$ となる。1次のHermite多項式(ξ の1次)は期待値と分散のみを評価するが、2次以上を考慮することで複雑な確

率分布を表現できる。また、 Ψ_n は $\langle \Psi_n \Psi_m \rangle = \delta_{nm}$ の直交性を持つ。ここで、 δ_{nm} はクロネッカーデルタである。

ヤング率が確率変数の時、全体剛性行列 $\mathbf{K}$ も確率変数となるため、支配方程式も確率的な行列方程式となる。

$$\mathbf{K}(\omega) \mathbf{u}(\omega) = \mathbf{F}^{\text{ext}} \quad (3)$$

ここで、 $\mathbf{F}^{\text{ext}}$ は外力ベクトルである。確率変数にKL展開及びPC展開を適用すると、 Ψ_n の直交性より、式(3)は展開係数 $\mathbf{u}_n$ に対する行列方程式に拡張される。

$$\sum_{n=0}^P [\mathbf{K}_{mn}] \mathbf{u}_n = \mathbf{F}^{\text{ext}} \delta_{0m} \quad (m = 0, 1, \dots, P) \quad (4)$$

ここで、 $[\mathbf{K}_{mn}]$ は全体剛性行列の展開係数 $\mathbf{K}_i$ を用いて以下で与えられる。

$$[\mathbf{K}_{mn}] = \sum_{i=0}^M \langle \xi_i \Psi_n \Psi_m \rangle \mathbf{K}_i \quad (5)$$

なお、 $\mathbf{u}_0 = \langle \mathbf{u} \rangle$, $\mathbf{K}_0 = \langle \mathbf{K} \rangle$ 及び $\Psi_0 = \xi_0 = 1$ とした。

3. 非線形SSFEMの提案

3. 1. SSRMAの概要

降伏に伴う応力の更新手法の一つとして、陰的弾性予測子/リターンマッピングアルゴリズム⁴⁾がある。物性場に不確実性を伴う場合、応力や降伏曲面も不確実性を伴う。SSFEMの枠組みでは、これらの降伏に関わる応答場についてもPC展開を適用すべきである。

SSRMAはリターンマッピングアルゴリズムの応答場である応力や降伏関数に1次のPC展開を適用した確率弾塑性モデルである³⁾。このとき、応力に依存する接線剛性行列 $\mathbf{C}^{\text{ep}}$ も1次でPC展開される。

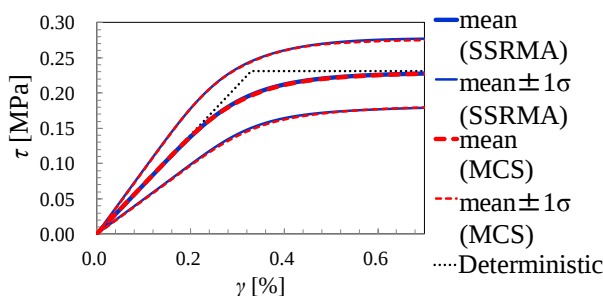
$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, \omega) = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle + \sum_{i=1}^M \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \xi_i(\omega) \quad (6)$$

$$\mathbf{C}^{\text{ep}}(\mathbf{x}, \omega) = \langle \mathbf{C}^{\text{ep}} \rangle + \sum_{i=1}^M \mathbf{C}_i^{\text{ep}}(\mathbf{x}) \xi_i(\omega) \quad (7)$$

SSRMAを用いて、物性場に不確実性を伴う場合の応力歪関係を評価できる。ここでは、1次元弾完全塑性von Mises降伏モデルに対し、せん断歪 γ を変化させた場合の τ - γ 関係を評価する。せん断弾性係数及び降伏応力の期待値(変動係数)を70MPa(30%)及び0.4MPa(20%)とした時の結果を図-1に示す。図-1には決定論の結果と 10^4 回のモンテカルロ計算(以下、MCS)の結果も示す。SSRMAとMCSの結果は一致しており、SSRMAにより応力等の期待値と分散を効率的に評価できる。

キーワード 確率論的リスク評価, スペクトル確率有限要素法, 確率弾塑性モデル

連絡先 〒163-0606 東京都新宿区西新宿 1-25-1 大成建設(株) 原子力本部 T E L 03-5381-5315

図-1 τ - γ 関係 (期待値, 期待値±標準偏差, 決定論)

3. 2. 非線形 SSFEM の定式化

ここでは, SSRMA を用いた非線形 SSFEM の定式化を行う. 物性場に不確実性を伴う場合, 変位増分 $^{[j]}\Delta u$ に対する支配方程式は以下のように与えられる.

$$^{[j-1]}K(\omega)^{[j]}\Delta u(\omega) = F^{ext} - ^{[j-1]}F^{int}(\omega) \quad (8)$$

ここで, 左上付きの添え字 $^{[j]}$ はある荷重ステップにおける j 回目の収束計算であることを示している. また, F^{int} は不釣り合い応力による節点内力を示している. 全体剛性行列 K 及び節点内力 F^{int} は, 接線剛性行列 C^{ep} 及び応力 σ を用いて, 以下のように与えられる.

$$^{[j-1]}K(\omega) = \sum_{elem} \int_{V_{elem}} B^T [^{[j-1]}C^{ep}(\omega)] B dV \quad (9)$$

$$^{[j-1]}F^{int}(\omega) = \sum_{elem} \int_{V_{elem}} B^T [^{[j-1]}C^{ep}(\omega)] \sigma(\omega) dV \quad (10)$$

ここで, B は B マトリックスである. また, V_{elem} は要素領域, $\sum_{elem}$ は全要素分の足し合せを表す.

SSRMA により確率的降伏を評価する場合, 式(6)及び式(7)のように, C^{ep} 及び σ を1次でPC展開する. 従って, K 及び F^{int} も1次でPC展開され, 各展開係数は

$$^{[j-1]}K_i = \sum_{elem} \int_{V_{elem}} B^T [^{[j-1]}C_i^{ep}] B dV \quad (11)$$

$$^{[j-1]}F_i^{int} = \sum_{elem} \int_{V_{elem}} B^T [^{[j-1]}C_i^{ep}] \sigma_i dV \quad (12)$$

となる. すると, 式(8)の増分形の支配方程式は, 展開係数の行列方程式として以下のように求められる.

$$\sum_{n=0}^P [^{[j-1]}K_{mn}] ^{[j]}\Delta u_m = ^{[j-1]}\Delta F_m \quad (13)$$

ここで, $[K_{mn}]$ 及び ΔF_m は以下で与えられる.

$$[^{[j-1]}K_{mn}] = \sum_{i=0}^M \langle \xi_i \psi_n \psi_m \rangle ^{[j-1]}K_i \quad (14)$$

$$^{[j-1]}\Delta F_m = F^{ext} \delta_{0m} - \sum_{i=0}^M \langle \xi_i \psi_m \rangle ^{[j-1]}F_i^{int} \quad (15)$$

表-1にSSRMAを用いた非線形SSFEMの確率変数とそれらに適応するスペクトル展開を整理して示す. 確率的降伏の評価にSSRMAを用いるため, 応力及び接線剛性行列には1次のPC展開を適用する. これは, 降伏に関わる応答場の期待値と分散のみを評価することに対応する. 一方, 変位および歪については, 線形SSFEMと同様に, 任意の次数のPC展開を適用するため, 複雑な確率分布を評価できる. 図-2にSSRMAを用いた非

線形SSFEMの評価フローを示す. このように, 変位の導出部分は線形SSFEMと同様の行列方程式となる. ただし, 各ステップの剛性行列はSSRMAにより確率的降伏を考慮して更新される.

表-1 非線形SSFEMにおける確率変数の整理

種類	確率変数	展開法 (次数)	確率分布の特徴
物性場	ヤング率 材料強度	KL展開 (任意)	空間的相関
応答場	変位 歪	PC展開 (任意)	複雑な分布 (期待値, 分散, 歪度, 尖度等)
	応力 剛性行列	PC展開 (1次)	期待値と分散

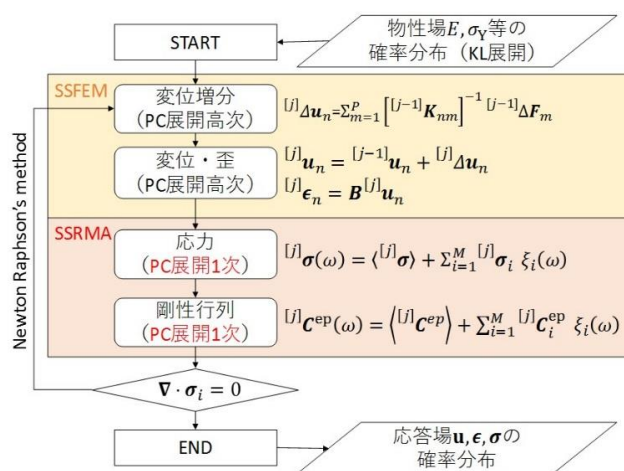


図-2 SSRMAを用いた非線形SSFEMの評価フロー

4. まとめ

本稿では, SSRMAを用いた非線形SSFEMを提案した. 提案する非線形SSFEMは剛性行列に1次のPC展開を適用するモデルであるが, 確率的降伏に対する期待値と分散を考慮することができる. 非線形SSFEMの具体的な計算例は別論文⁵⁾に示す.

参考文献

- 1) R. G. Ghanem and P. D. Spanos: *Stochastic Finite Elements - A Spectral Approach*, Dover Publications, Inc., 1991.
- 2) M. Anders and M. Hori: Stochastic finite element method for elasto-plastic body, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 46.11 (1999): 1897-1916.
- 3) 羽場一基, 堀田渉, 畑明仁, 渡辺和明, 堀宗朗: スペクトル展開を用いた確率リターンマッピングアルゴリズムの基礎的検討, 土木学会論文集 (投稿中)
- 4) J. C. Simo and T. J. R. Hughes: *Computational Inelasticity*, Springer, New York, 1998.
- 5) 堀田渉, 羽場一基, 畑明仁, 鈴木俊一, 渡辺和明, 堀宗朗: 確率的降伏を考慮した非線形スペクトル確率有限要素法の数値的検証, 土木学会第72回年次学術講演会, 2017. (投稿中)