

制御理論を用いた橋梁上任意点に作用する移動荷重の荷重効果同定

東京都市大学大学院	学生会員	○鈴木 健吾
東京都市大学工学部	正会員	丸山 收
東京都市大学総合研究所	正会員	関屋 英彦
東京都市大学総合研究所	正会員	小西 拓洋
東京都市大学総合研究所	フェロー会員	三木 千壽

1. 研究背景および目的

道路橋は、交通荷重が繰り返し載荷されることによって疲労損傷が進行し、鋼橋においては部材の疲労破壊につながる¹⁾。外乱である交通荷重の特性を把握することは、橋梁の維持管理において極めて重要である。本研究は既往の研究²⁾をもとにして、観測データ、即ち1自由度移動荷重-梁系における梁の応答から、梁に対する移動荷重の荷重効果を同定する手法についての基礎的な検討をしている。

2. 移動荷重および梁の振動方程式

本研究では単純な1自由度振動系として移動荷重をモデル化しているため、1自由度移動荷重と梁の連成振動を考える。また、一般性を持たせるため、移動荷重に関しては複数台が連なって走行する連行荷重の場合を考えるが、複数台の場合でも等価な荷重として推定するため、単一の場合²⁾と同じ式を用いて推定できると考える。

s 台目における1自由度移動荷重の鉛直変位を $u_s(t_s)$ とし、梁の n 次振動モードによる任意点 z_1 での動的たわみを $y_n(z_1, t)$ とすると、梁上を通行する s 台目における移動荷重の振動方程式は次式で与えられる³⁾。

$$\begin{aligned} & \ddot{u}_s(t_s) + 2\beta_s \omega_s \dot{u}_s(t_s) + \omega_s^2 u_s(t_s) \\ &= \sum_n \left[\dot{y}_n(z_1, t) \left\{ 2\beta_s \omega_s \frac{\varphi_n(v_s t_s)}{\varphi_n(z_1)} \right\} \right. \\ & \quad \left. + y_n(z_1, t) \left\{ 2\beta_s \omega_s \frac{\dot{\varphi}_n(v_s t_s)}{\varphi_n(z_1)} + \omega_s^2 \frac{\varphi_n(v_s t_s)}{\varphi_n(z_1)} \right\} \right] \\ & \quad + 2\beta_s \omega_s \dot{\gamma}(v_s t_s) + \omega_s^2 \gamma(v_s t_s) \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 β_s : 移動荷重の減衰定数、 ω_s : 移動荷重の固有円振動数 (rad/sec)、 $\varphi_n(\cdot)$: 梁の n 次振動モード、 v_s : 走行速度 (m/sec)、 $\gamma(\cdot)$: 表面凹凸(cm)、 L : スパン長(m)である。なお、単純梁の場合には、 $\varphi_n(x) = \sin(n\pi x/L)$ で

ある。また、 $t_s = t - t_{0s}$ であり、 t_{0s} : s 台目の車両が梁に差し掛かった時の時刻である。

一方、任意点 z_1 での梁の動的たわみを $y(z_1, t)$ とすると、 n 次振動モードに対する梁の振動方程式は次式で与えられる。

$$y(z_1, t) = \sum_n y_n(z_1, t) \quad (2)$$

$$\ddot{y}_n(z_1, t) + 2\beta'_n \omega'_n \dot{y}_n(z_1, t) + \omega_n'^2 y_n(z_1, t) = d_n(z_1, t) \quad (3)$$

$$d_n(z_1, t) = \frac{1}{M} \sum_s \{ m_{vs} (g - \ddot{u}_s(t_s)) \varphi_n(v_s t_s) \} \varphi_n(z_1) \quad (4)$$

ここで、 β'_n : 梁の n 次振動モードの減衰定数、 ω'_n : 梁の n 次振動モードの固有円振動数(rad/sec)、 m_{vs} : 移動荷重の質量、 M : 梁の有効質量($M = \rho L/2g$)、 ρ : 梁の単位長さ当たり重量である。式(4)は振動方程式(3)の外力項を表しており、これに梁の有効質量: M を乗じた値が任意点 z_1 での移動荷重による荷重外力となる。

3. 同定問題の定式化

移動荷重による荷重効果を推定する際に、梁の応答は1次振動が卓越するものと仮定して、梁に1次振動まで考慮し、観測データは梁の3次振動まで考慮した。

荷重効果を推定するために $x_1(t) = y_1(z_1, t)$ および $x_2(t) = \dot{y}_1(z_1, t)$ と状態空間表示を行い、状態ベクトルを $\mathbf{X}(t) = [x_1(t), x_2(t)]^T$ 、 $\mathbf{d}(t) = [d_1(z_1, t)]$ とすると、各振動方程式より、次の状態方程式および観測方程式を得る。

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{\Phi}(t) \mathbf{X}(t) + \mathbf{\Gamma}(t) \mathbf{d}(t) \quad (5)$$

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{X}(t) + \mathbf{V}(t) \quad (6)$$

ここで、式(5)の左辺 $\dot{\mathbf{X}}(t)$ は状態ベクトルの時間微分を表している。 $\mathbf{\Phi}(t)$ および $\mathbf{\Gamma}(t)$ は係数行列である。また、

キーワード 走行荷重、連行荷重、Weigh-In-Motion、振動方程式、制御理論

連絡先 〒158-8557 東京都世田谷区玉堤 1-28-1 東京都市大学 TEL 03-5707-0104 E-mail: g1681711@tcu.ac.jp

C:観測量の係数行列 (対角成分のみ 1.0 で、その他の成分はすべて 0), **V**(*t*):観測ノイズである. ここでは、梁の任意点 *z*₁における変位応答, 速度応答が観測されるものとしている.

式(5)において、荷重効果の時間関数 **d**(*t*) を精度よく同定するための定式化を行う.

$$\mathbf{L}(\mathbf{X}(t),\mathbf{d}(t))=(\mathbf{Y}(t)-\mathbf{C}\mathbf{X}(t))^T\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{Y}(t)-\mathbf{C}\mathbf{X}(t))+\mathbf{d}(t)^T\mathbf{W}\mathbf{d}(t)$$

(7)

ここで、**R**:重み行列, **W**:スカラー量の重みである. 式(7)において、第 1 項は観測値 **Y**(*t*) と推定応答 **CX**(*t*) の誤差を、第 2 項は荷重効果を評価する項である.

式(7)に、状態方程式より与えられる拘束条件を考慮して、時間方向の積分値を最小とする問題を考える.

$$J=\int_{t_0}^{t_f}\{\mathbf{L}(\mathbf{X}(\tau),\mathbf{d}(\tau))+\lambda^T(\tau)(\boldsymbol{\Phi}(\tau)\mathbf{X}(\tau)+\boldsymbol{\Gamma}(\tau)\mathbf{d}(\tau)-\dot{\mathbf{X}}(\tau))\}d\tau\rightarrow\min.$$

(8)

ここで、*t*₀:初期時刻, *t*_f:終端時刻, **λ**(*τ*):Lagrange の未定乗数である. 式(7)は制約条件付き最小化問題であり、ここから荷重効果の時間関数 **d**(*t*) は以下のように得られる.

$$\dot{\mathbf{X}}(t)=\mathbf{A}\mathbf{X}(t)+\mathbf{G}\mathbf{d}(t)$$

(9)

$$\mathbf{d}(t)=\frac{1}{2}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{G}^T\lambda(t)$$

(10)

この式(10)は、梁の振動方程式の外力項である式(4)と対応しており、梁の有効質量:**M** を乗じることで連成効果を含んだ荷重外力:**W_e**を表せる.

4. 試算

断面が均一な単純梁を対象として、表-1 に示す諸言を用いた観測データの作成を行った. 同一条件の 2 台の荷重が単純梁の左方から同じ速度で走行してくるとして、梁の左方から *z*₁=12(m)における変位応答および速度応答を観測データとした. これらの観測データは梁に 1 台目が進入してから 15 秒後までについて、梁の 3 次振動成分まで考慮して作成した. そのうちの梁の変位応答を図-1 に示す. この観測データをもとに推定した、連成効果を含んだ荷重外力:**W_e**を太線で示したものが図-2 である. この図では同一条件下において単一荷重の外力推定を実施した結果²⁾についても細線で示している. 2 台連行荷重による荷重外力は、移動荷重が梁上に 1 台のみとなる 0~2 秒および 5~7 秒において

表-1 主要諸言

単純梁 [L = 60 (m)]					
β' ₁	ω' ₁ (rad/sec)	β' ₂	ω' ₂ (rad/sec)	β' ₃	ω' ₃ (rad/sec)
0.04213	10.689	0.01053	42.758	0.00468	96.205
1自由度振動系移動荷重 (2台とも同条件)					
β _h	ω _h (rad/sec)	<i>m</i> _{vh} (ton)	<i>v</i> _h (m/sec)	<i>t</i> ₀₁ (sec)	<i>t</i> ₀₂ (sec)
0.03	16.0	13.6	12.0	0.0	2.0

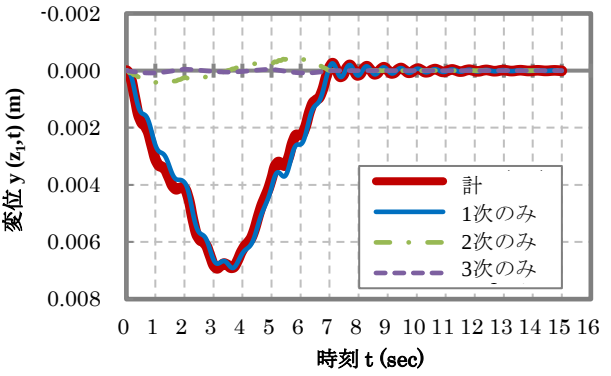


図-1 梁の変位応答 *y*(*z*₁, *t*)

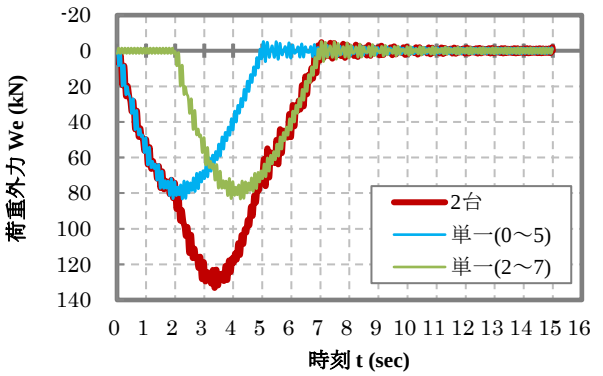


図-2 荷重外力推定結果 *W_e*

は単一荷重の場合とうまく対応していることがわかる.

5. 今後の展望

今後は車両数をさらに増やした場合、並びに梁形状が複雑な場合について解析を行う. また、加速度計で観測データが得られた場合および実橋梁における検討を考えている.

参考文献

1) 第 1 編 橋梁の現状と劣化の推定-国土交通省近畿地方整備局, www.kkr.mlit.go.jp/road/shintoshikenkyukai/pdf/data09_02.pdf, 2017 年 1 月 27 日閲覧

2) 鈴木健吾, 丸山収, 関屋英彦, 小西拓洋, 三木千壽: 制御理論を用いた Weigh-In-Motion に関する基礎的検討, 土木学会論文集 A2(応用力学) Vol. 72 No. 2, pp.I_45-I_51, 2016.

3) 丸山収, 斉藤悦郎, 星谷勝: 移動荷重-はり系の動特性推定, 土木学会論文集 第 368 号/I-5, pp.283-292, 1986.