

## 振動解析へのカルマンフィルタの適用

○ 佐藤工業(株) 正会員 黒田 千歳  
 佐藤工業(株) 正会員 歌川 紀之  
 佐藤工業(株) 正会員 小泉 直人

## 1. はじめに

ノイズを含む線形システムの推定に用いられるカルマンフィルタは、特に離散時間システムの場合、単純な代数的計算から導くことができ、工学や経済学などの分野で広く用いられている [1] [2]。本稿では有限要素法による振動解析に適用した結果について報告する。

## 2. カルマンフィルタ

ある物理現象が時間とともに変化する物理量を表す  $n$  次元の変数ベクトル  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  により支配されており、 $m$  個の測定量  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$  が与えられていて、 $\mathbf{y}$  が  $m \times n$  の定数行列  $\mathbf{C}$  と計測誤差に該当するノイズ  $\mathbf{w}$  により

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{w} \quad (1)$$

と表されるものとする。ノイズ  $\mathbf{w}$  は平均  $\mathbf{0}$ 、分散  $\mathbf{W}$  のガウシアン白色雑音である。また、物理量  $\mathbf{x}$  は直接測定できず、 $\mathbf{y}$  のみが測定できるものとする。

$\mathbf{x}$  と  $\mathbf{w}$  の平均ベクトルと分散行列が次のように与えられるものとする。

$$E(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{x}}, E\{(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})'\} = \mathbf{X} \quad (2)$$

$$E(\mathbf{w}) = \bar{\mathbf{w}}, E\{(\mathbf{w} - \bar{\mathbf{w}})(\mathbf{w} - \bar{\mathbf{w}})'\} = \mathbf{W} \quad (3)$$

このとき、 $\mathbf{x}$  の推定値  $\hat{\mathbf{x}}$  が

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{y} + \mathbf{d} \quad (4)$$

と表されるものとし、誤差

$$\mathbf{e} = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x} \quad (5)$$

の分散を最小にする  $\mathbf{F}$  と  $\mathbf{d}$  を求めると推定ベクトル  $\hat{\mathbf{x}}$  と誤差の共分散行列  $\mathbf{P}$  は次のように決定される。

$$\hat{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{P}\mathbf{C}'\mathbf{W}^{-1}\{\mathbf{y} - (\mathbf{C}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{w}})\} \quad (6)$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{X} - \mathbf{X}\mathbf{C}'(\mathbf{C}\mathbf{X}\mathbf{C}' + \mathbf{W})^{-1}\mathbf{C}\mathbf{X} \quad (7)$$

さらに、物理量  $\mathbf{x}$  が行列  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 、平均  $\mathbf{0}$ 、分散  $\mathbf{U}$  を持つガウシアン白色雑音ノイズ  $\mathbf{u}_t$  を用いて逐次的に

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{A}_t\mathbf{x}_t + \mathbf{B}_t + \mathbf{u}_t \quad (8)$$

のように定まり、測定量  $\mathbf{y}$  が

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{C}\mathbf{x}_t + \mathbf{w}_t \quad (9)$$

と表されて

$$E(\mathbf{w}_t) = \bar{\mathbf{w}}, E\{(\mathbf{w}_k - \bar{\mathbf{w}}_k)(\mathbf{w}_l - \bar{\mathbf{w}}_l)'\} = \delta_{kl}\mathbf{W} \quad (10)$$

となるとき、推定値  $\hat{\mathbf{x}}$  と誤差の共分散行列  $\mathbf{P}_k$  は次のように決定されるが、これをカルマンフィルタと呼んでいる。

$$\hat{\mathbf{x}}_t = \tilde{\mathbf{x}}_t + \mathbf{P}\mathbf{C}'\mathbf{W}^{-1}\{\mathbf{y}_t - (\mathbf{C}_t\tilde{\mathbf{x}}_t + \bar{\mathbf{w}}_t)\} \quad (11)$$

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{x}}_t = \mathbf{A}_{t-1}\hat{\mathbf{x}}_{t-1} + \mathbf{B}_{t-1} \\ \mathbf{P}_t = \mathbf{M}_t^{-1} + (\mathbf{C}_t'\mathbf{W}_t^{-1}\mathbf{C}_t)^{-1} \\ \mathbf{M}_t = \mathbf{A}_{t-1}\mathbf{P}_{t-1}\mathbf{A}_{t-1}' + \mathbf{U}_{t-1} \end{cases}$$

## 3. 振動解析への適用

有限要素法により次の質量  $\mathbf{M}$ 、減衰  $\mathbf{C}$ 、剛性  $\mathbf{K}$  および荷重  $\mathbf{f}$  からなる振動方程式

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (12)$$

をニューマークの  $\beta$  法により解く場合、次のような式が得られる。

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{u}}(t + \Delta t) &= \{\mathbf{M} + (\Delta t/2)\mathbf{C} + \beta(\Delta t)^2\mathbf{K}\}^{-1} \\ &\quad [f(t + \Delta t) - \mathbf{C}\{\dot{\mathbf{u}}(t) + \frac{\Delta t}{2}\ddot{\mathbf{u}}(t)\} \\ &\quad - \mathbf{K}\{u(t) + \Delta t\dot{u}(t)\} \\ &\quad + (1/2 - \beta)(\Delta t)^2\ddot{u}(t)] \end{aligned} \quad (13)$$

右辺より

$$\mathbf{A} = \{\mathbf{M} + (\Delta t/2)\mathbf{C} + \beta(\Delta t)^2\mathbf{K}\}^{-1} [-\mathbf{C}\frac{\Delta t}{2} - \mathbf{K}(1/2 - \beta)(\Delta t)^2] \quad (14)$$

$$\mathbf{B} = \{\mathbf{M} + (\Delta t/2)\mathbf{C} + \beta(\Delta t)^2\mathbf{K}\}^{-1} [f(t + \Delta t) - \mathbf{C}\dot{u}(t) - \mathbf{K}\{u(t) + \Delta t\dot{u}(t)\}] \quad (15)$$

キーワード カルマンフィルタ, 振動解析, 有限要素法

連絡先 〒103-8639 東京都中央区日本橋本町4-12-19 TEL 03-3661-2932 FAX 03-3808-6877

とおけば

$$\ddot{u}(t + \Delta t) = A\ddot{u}(t) + B(t) \quad (16)$$

となり、これにカルマンフィルタを適用することができる。

実際に、図-1 に示す片持ち梁のモデルで計算を行った例を示す。

1. 端点 L に集中荷重  $P = 1.0(\text{kg/m})$  を与えて FEM で計算を行う。
2. 観測点 M での FEM 計算の結果に、 $\sigma_w^2 = 0.04$

のノイズを加えたものを観測値とする。これを図-2 に示す。

3. 観測値とシステムノイズ  $\sigma_u^2 = 0.01$  を用いてカルマンフィルタの計算を行う。
4. 参照点 R で、FEM とカルマンフィルタの計算結果を比較する。図-3 に比較を示す。実線がカルマンフィルタ、× が FEM を示している。カルマンフィルタにより、FEM で計算された振動の真の値に近い推定値が得られている。

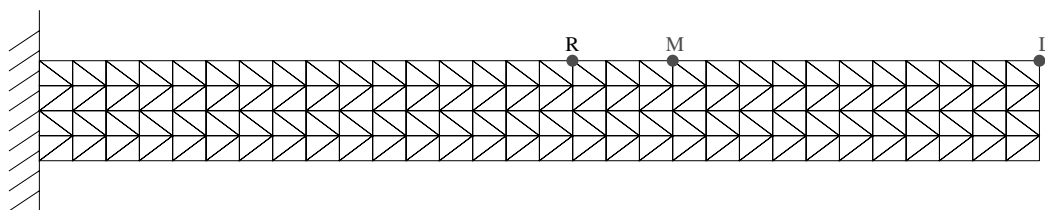


図-1: モデル

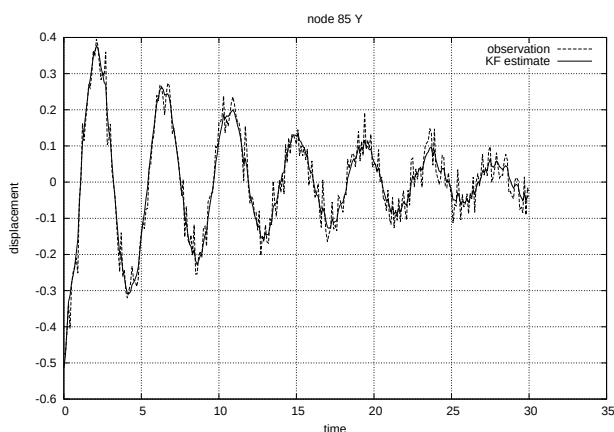


図-2: 観測点

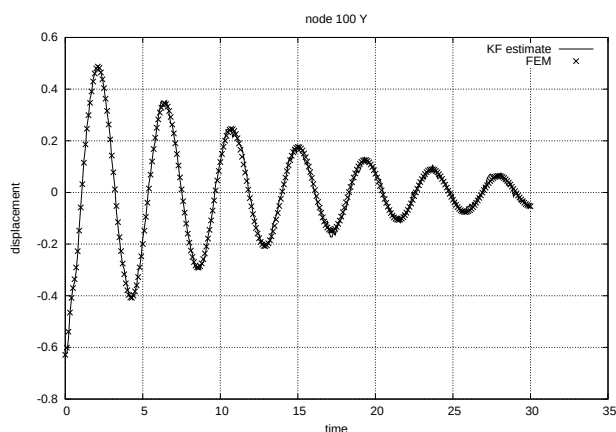


図-3: 参照点

## 6. おわりに

有限要素法の振動方程式にカルマンフィルタを適用して、ノイズを含む観測値から適切な推定値が得られることを示した。今後は、この方法をコンクリート構造物などで計測された打音のデータなどに適用してみる予定である。

## 参考文献

- [1] Y.Kato, M.Kawahara, N.Koizumi: "Kalman filter finite element method applied to dynamic ground motion", International journal for numerical and analytical methods in geomechanics, 1135-1151, 2009
- [2] 有本卓: カルマン・フィルタ(システム・サイエンス・シリーズ), 産業図書, 1977