

インピーダンス境界条件を考慮した境界要素法による3次元非定常音場解析

中央大学大学院 学生員 ○高木 貴弘
 京都大学大学院 正会員 吉川 仁
 中央大学 正会員 檜山 和男

1. はじめに

近年のコンピュータの性能の向上に伴い、都市空間の騒音の評価には数値シミュレーションが広く用いられている。本研究では、複雑な音場環境の解析に適している波動音響理論に基づいた音場解析を行う。数値シミュレーション手法としては、外部問題に適している境界要素法¹⁾を用いる。また、著者らのこれまでの研究²⁾では完全反射境界を用いた音場解析が行われてきたが、実際の路面や遮音壁は音波が一部透過するために、本研究では適用性の向上を図るためインピーダンス境界条件を考える。インピーダンス境界を考慮することにより、より現実に近い音場の数値解析が可能となる。

本報告では、インピーダンス境界を持つ初期値境界値問題の数値解析の妥当性の検証をするために3次元非定常の音場解析を行う。

2. インピーダンス境界条件を考慮した初期値・境界値問題

(1) インピーダンス境界条件

次に示すインピーダンス境界条件をもつ波動問題を考える。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_i}(x, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = 0 \quad x \text{ in } D, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, t) = -\frac{\rho_a}{Z_n} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \quad x \text{ on } S, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = 0, \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad x \text{ in } D, \quad (3)$$

$$u(x, t) \rightarrow u_{\text{in}}(x, t), |x| \rightarrow \infty \quad x \text{ in } D \quad (4)$$

ここに、 u は音圧、 n は領域からの外向き単位法線ベクトル、 c は音速、 ρ_a は空気の密度、 Z_n はノーマル音響インピーダンス、 u_{in} は入射波である。 D, S はそれぞれ解析領域、解析境界を示す。境界条件式(2)において右辺の $\frac{\partial u}{\partial t}$ は直接与えられていないので差分によって近似する。本報告では、2次精度の差分近似である式(5)を考える。

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, l\Delta t) &= \frac{3u(x, l\Delta t) - 4u(x, (l-1)\Delta t) + u(x, (l-2)\Delta t)}{2\Delta t} \\ &\quad + O(\Delta t^2) \quad (5) \end{aligned}$$

ここに、 Δt は時間増分、 l は時間ステップを表す。

(2) インピーダンス境界条件を考慮した時間域境界要素法

式(1)に対応する境界積分方程式は次式で得られる。

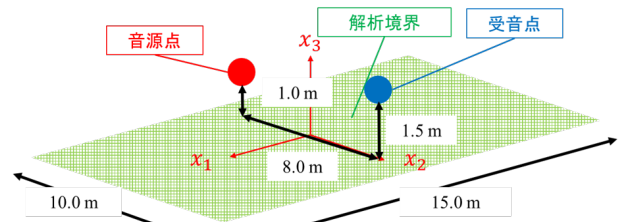


図-1 解析モデル1

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u(x, t) &= u_{\text{in}}(x, t) + \int_0^t \int_S \Gamma(x-y, t-t_0) \frac{\partial u}{\partial n}(y, t_0) dS dt_0 \\ &\quad - \int_0^t \int_S \frac{\partial \Gamma}{\partial n}(x-y, t-t_0) u(y, t_0) dS dt_0 \quad (6) \end{aligned}$$

ここに、 Γ は3次元波動方程式の基本解を表す。空間を区分一定要素、時間を区分線形補間で離散化し、数値的に u を求める。このとき得られる境界積分方程式を代数方程式の形で表すと次式のようにになる。

$$\begin{aligned} \tilde{D}^l u^l &= \sum_{m=1}^{l-1} \tilde{S}^m v^{l-m} - \sum_{m=2}^l \tilde{D}^m u^{l+1-m} + u_{\text{in}}^l, \quad (7) \\ \tilde{S}^m &= \frac{\rho_a}{2Z_n \Delta t} S^m, \tilde{D}^m = D^m + \frac{3\rho_a}{2Z_n \Delta t} S^m, \\ v^{l-m} &= 4u^{l-m} - u^{l-1-m} \end{aligned}$$

ここに、 u^l, u_{in}^l をそれぞれ l ステップ目における u, u_{in} からなる節点ベクトルとし、 S^m と D^m を $(m-1)$ ステップ前の境界要素から受ける影響を示す1重層、2重層の影響係数行列とする。

3. 数値解析例

インピーダンス境界条件を考慮した時間域境界要素法の妥当性の検証のための数値解析例として、次の3次元非定常波動問題を取り上げる。

(1) 解析例1

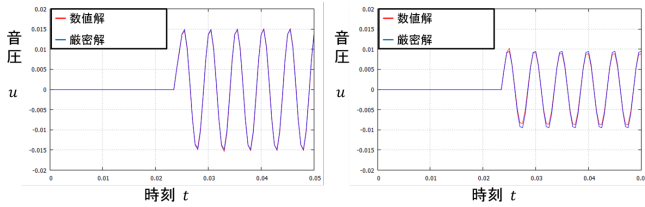
図-1に3次元半無限領域における非定常波動問題の解析モデルを示す。境界 $x_3 = 0$ の一边の長さが15.0 m × 10.0 mの長方形の部分要素分割する。最大要素分割幅を $\Delta x = 0.17$ m、境界要素数を11726とする。また、境界条件と入射波の値を以下に示す。

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, t) = -\frac{\rho_a}{Z_n} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t), \quad (8)$$

$$u_{\text{in}}(x, t) = \frac{\sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{|x-x_s|}{c} \right)}{4\pi |x-x_s|} \quad (9)$$

KeyWords: 境界要素法, 音響, インピーダンス境界条件

連絡先: 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 TEL. 03-3817-1815 Email: t.takagi@civil.chuo-u.ac.jp



a) 完全反射境界条件

b) インピーダンス境界条件

図-2 受音点 (0.0, 4.0, 1.5) m における音圧の時間変化の数値解と厳密解の比較

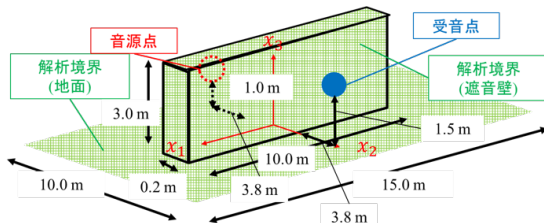


図-3 解析モデル 2

入射波として、音源点 $x_s = (0.0, -4.0, 1.0)$ m から発生する球面波を与え、反射境界にはインピーダンス境界条件を与える。波速、周期はそれぞれ $c = 340.0$ m/s, $T = 0.0050$ s とし、音響インピーダンスを $Z_n = 1.22 \times 10^3$ kg m⁻² s⁻¹, 空気密度を $\rho_a = 1.20$ kg/m³ とする。また、受音点の位置は $(0.0, 4.0, 1.0)$ m とする。解析する時間は 0.0000 s $< t \leq 0.0500$ s とし、時間増分を $\Delta t = 0.0005$ s, 時間ステップ数を 100 とする。この条件において、インピーダンス境界を用いた球面波の数値解析の妥当性を検証する。

図-2 に受音点 $(0.0, 4.0, 1.5)$ m における音圧の時間変化の数値解と厳密解の比較を示す。ここに、厳密解は音源からの入射波 u_{in} , 鏡像からの入射波 u_{mir} , 入射角 θ そして音響インピーダンス Z_n を用いることにより次式で表される。

$$u(x, t) = u_{in}(x, t) + \gamma u_{mir}(x, t), \quad (10)$$

$$\gamma = \frac{Z_n \cos \theta - \rho_a c}{Z_n \cos \theta + \rho_a c} \quad (11)$$

図から数値解と厳密解が良い一致を示していることが確認できる。また、音圧の時間変化が完全反射条件とインピーダンス境界条件ではっきり違いが出ていることが確認できる。

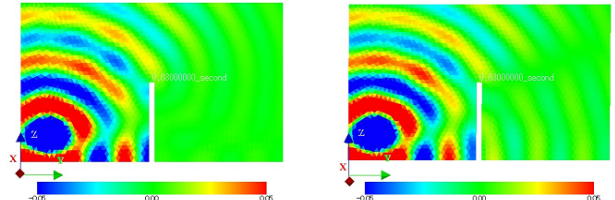
(2) 解析例 2

図-3 に 3 次元半無限領域における非定常波動問題の解析モデルを示す。境界 $x_3 = 0$ の一辺の長さが 15.0 m $\times$ 10.0 m の地面 S_g および一辺の長さが 10.0 m $\times$ 0.2 m $\times$ 3.0 m の遮音壁の表面 S_{wall} を要素分割する。最大要素分割幅を $\Delta x = 0.17$ m, 境界要素数を 17020 とする。また、境界条件を以下に示す。

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, t) = 0 \quad x \text{ on } S_g, \quad (12)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, t) = -\frac{\rho_a}{Z_n} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \quad x \text{ on } S_{wall} \quad (13)$$

解析境界のうち地面 S_g には完全反射境界条件を、遮音壁の表面 S_{wall} にはインピーダンス境界条件を与える。その他の条件は解析例 1 と同じものを用いる。この条件において、



a) 完全反射境界条件

b) インピーダンス境界条件

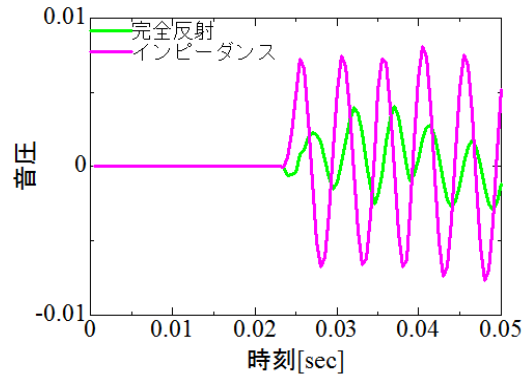
図-4 解析領域内の $x_1 = 0$ 断面上の音圧分布 ($t = 0.0300$ s)

図-5 受音点 (0.0, 4.0, 1.5) m における音圧の時刻変化の比較

遮音壁を有する解析領域における球面波の数値解析において遮音壁に対してインピーダンス境界条件を与えた場合とすべての境界面に対して完全反射境界条件を与えた場合の比較を行う。

図-4 に $t = 0.0300$ s における解析領域内の $x_1 = 0$ 断面上の音圧分布を示す。図よりインピーダンス境界条件を考慮した遮音壁は完全反射境界条件のものに比べて反射波が小さく、透過波が発生していることが確認できる。

続いて、図-5 に受音点における音圧の時刻変化の比較を示す。図より、インピーダンス境界条件の場合には受音点において球面波が遮音壁を一部透過していることが定量的に確認できる。

4. おわりに

本報告では、境界要素法による音場解析の基礎段階としてインピーダンスを考慮した境界条件の解析の妥当性の検証を行い、以下の結論を得た。

- 半無限領域における問題において、球面波によるインピーダンス境界条件を考慮した数値解析が妥当であることが確認できた。
- 遮音壁を有する問題に対してインピーダンス境界条件を考慮した数値解析では、すべての境界面が完全反射境界条件である場合に比べて遮音壁による反射波は減少し、透過波が発生することが確認できた。

今後の課題として、高速多重境界要素法²⁾へのインピーダンス境界条件の実装が挙げられる。

参考文献

- 1) 小林昭一：波動解析と境界要素法，京都大学学術出版会，pp.37-38，2000。
- 2) 岡村理一郎，吉川仁，高橋徹，榎山和男：時間域多重境界要素法を用いた大規模音場解析による道路交通騒音の可聴化，土木学会論文集 A2(応用力学)，I-311-I.318，2015。