

## 有限要素法による音の伝播解析における傾斜境界の取り扱い

日本大学 フェロー ○野村 卓史

大日本コンサルタント 栗城 祐太 (研究当時 日本大学学生)

埼玉県庁

長谷川翔平 (研究当時 日本大学大学院生)

## 1. はじめに

高架橋橋桁の振動や風力発電機など、公共物に由来する騒音の問題は土木環境分野の重要な問題の一つである。屋外における比較的長距離の伝播は気象条件等さまざまな要因の影響を受けることが知られており、筆者らはそれらを考慮できる有限要素法に基づく解析法の開発を進めている<sup>1,2)</sup>。この方法では音圧と擾乱流速を変数としている。地物や地表面における反射条件も音の伝播に影響する要因の一つであり、反射特性を空気と固体との間のインピーダンスによって与える場合、インピーダンス条件は擾乱流速の境界直交成分と音圧との間の条件として与えられる。したがって傾斜を有する地表面を扱う場合、有限要素解析モデルの境界における境界直交方向を評価することが必要となる。さらに音の伝播の基礎方程式は通常非粘性流体を仮定するため、擾乱流速の境界接線方向成分に対してはスリップ条件を適用する必要がある。しかし有限要素解析の節点における擾乱流速成分は全体座標系で定義されるので、傾斜境界上の節点における擾乱流速成分を局所的に座標変換する必要がある。本報告では傾斜境界におけるこのような扱いの解析法を報告する。

## 2. 基礎方程式と有限要素方程式

本研究における音の伝播の基礎方程式は音圧 $p$ と擾乱流速 $\mathbf{v}$ を変数とし、次式(1),(2)で表される。

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c^2 \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p = 0 \quad (1), (2)$$

ここで $\rho_0$ は音波による微小な密度変動の基準となる空気密度、 $c$ は音速である。本報告の解析は風や気温分布の影響を考えない単純な状況で行い、 $\rho_0, c$ とも一定とした。

基礎方程式(1),(2)に Galerkin 法に基づく有限要素法を適用し、次の有限要素方程式を得る。有限要素には8節点六面体要素を用いた。

$$\mathbf{M}_p \dot{\mathbf{P}} + \mathbf{A}_{pv} \mathbf{V} = 0, \quad \mathbf{M}_v \dot{\mathbf{V}} + \mathbf{A}_{vp} \mathbf{P} = 0 \quad (3), (4)$$

ベクトル $\mathbf{P}, \mathbf{V}$ は節点音圧および節点擾乱流速のベクトルである。有限要素方程式(3),(4)に対し、直接時間積分法に後退 Euler 法、連立一次方程式の解法に反復解法である BiCG 法を採用した。式(3),(4)の係数行列は重ね合わせをせず、要素ごとに記憶している。

## 3. 傾斜境界における法線方向および接線方向

8節点六面体要素を用いているため、傾斜を有する曲面上の地表面は図1のような歪んだ四辺形の集まりである(個々の四辺形は双曲面)。図1の節点 $P$ における単位法線ベクトル $\mathbf{n}_p$ は、節点 $P$ を共有する3角形平面に直交するベクトル $\mathbf{n}_k$ と個々の3角形の面積 $A_k$ を重みとして次式(5)で与えるものとした。

$$\mathbf{n}_p = \frac{\sum_{k=1}^K A_k \mathbf{n}_k}{\sum_{k=1}^K A_k} \quad (5)$$

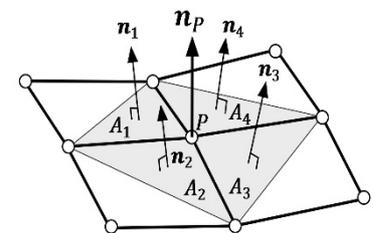


図1 節点における法線方向の評価

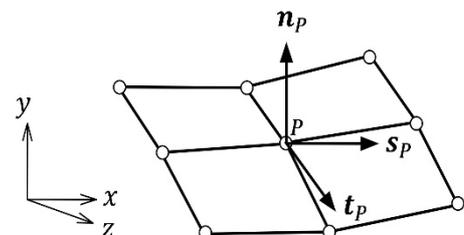


図2 節点における接線方向

キーワード 音の伝播, 傾斜境界, 有限要素法, 騒音

連絡先 〒101-8308 千代田区区神田駿河台 1-8-14 日本大学理工学部土木工学科 TEL 03-3259-0411

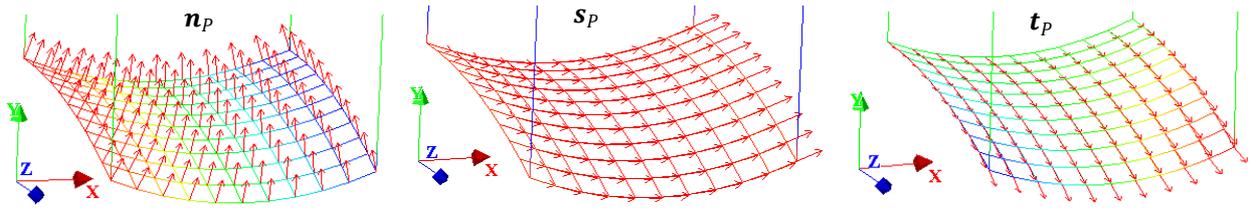


図3 曲面状境界面の節点における3つの単位ベクトル  $\mathbf{n}_p$ ,  $\mathbf{s}_p$ ,  $\mathbf{t}_p$  の分布

単位法線ベクトル  $\mathbf{n}_p$  に直交する他の2方向の単位ベクトル  $\mathbf{s}_p$ ,  $\mathbf{t}_p$  は次のように定義して算出した。

- (1) 単位ベクトル  $\mathbf{s}_p$  は全体座標系の  $z$  軸に直交する鉛直面内にあり,  $\mathbf{n}_p$  に直交する ( $\mathbf{n}_p \cdot \mathbf{s}_p = 0$ ).
- (2) 単位ベクトル  $\mathbf{t}_p$  は  $\mathbf{n}_p$ ,  $\mathbf{s}_p$  に直交する ( $\mathbf{t}_p = \mathbf{n}_p \times \mathbf{s}_p$ ).

図3にこのようにして算出した3つの単位ベクトル  $\mathbf{n}_p$ ,  $\mathbf{s}_p$ ,  $\mathbf{t}_p$  の分布の例を示す. この単位ベクトル  $\mathbf{n}_p$ ,  $\mathbf{s}_p$ ,  $\mathbf{t}_p$  を, これらの節点ごとに導入される局所座標系の基底ベクトルとする.

#### 4. 係数行列の修正

基底ベクトル  $\mathbf{n}_p$ ,  $\mathbf{s}_p$ ,  $\mathbf{t}_p$  から得られる全体座標系から局所座標系への座標変換行列を  $\lambda_p$  とし, 節点  $P$  の擾乱流速ベクトル  $\mathbf{V}_p^g$  を座標変換する [ $\mathbf{V}_p^g = \lambda_p \mathbf{V}_p^n$ ]. この  $\mathbf{V}_p^n$  を節点変数とする. これに伴い, 式(3),(4)の係数行列を次のように修正する.

$$\mathbf{A}_{pv} \Rightarrow \mathbf{A}_{pv} \mathbf{T}, \quad \mathbf{A}_{vp} \Rightarrow \mathbf{T}^t \mathbf{A}_{vp}, \quad \mathbf{M}_v \Rightarrow \mathbf{T}^t \mathbf{M}_v \mathbf{T} \quad (6), (7), (8)$$

ここで行列  $\mathbf{T}$  は座標変換行列  $\lambda_p$  によって構成される行列である.

#### 5. 解析例

図4は高架橋のねじれ振動による音の伝播の解析モデルである. 要素数は74,000である. 解析境界の底面は2次曲面で, この境界上の節点変数に上述の処理を施し, 擾乱流速の法線方向成分をゼロとして slip 条件を与えた. 他の上面境界と側面境界には透過境界条件を与えた. 橋桁を単純化した中央の平板の上下面にねじれモードに対応する擾乱流速分布を与え, 周期1.0sで正弦的に変動させた. 空気密度  $\rho_0 = 1.2 \text{ kg/m}^3$ , 音速  $c = 340 \text{ m/s}$ , 時間積分間隔 0.1s とした.

図5に瞬間的な擾乱流速ベクトル分布の解析結果の例を示す. 本研究で報告した境界条件の処理方法を適用した結果, 擾乱流速ベクトルは曲面境界に沿っており, 傾斜を有する境界面におけるスリップ条件を実現できたことが確認される.

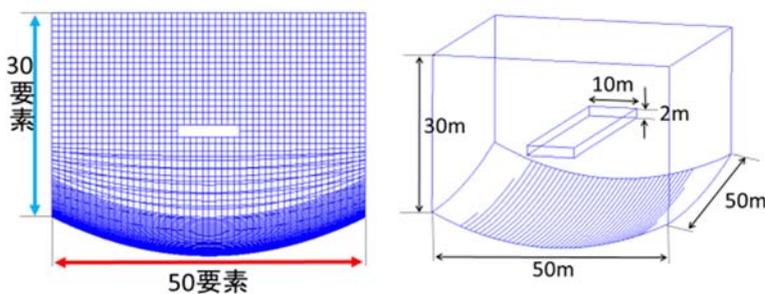


図4 解析対象領域と解析メッシュ

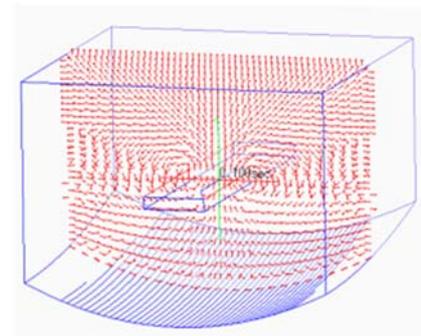


図5 擾乱流速ベクトル分布

#### 参考文献

- 1) T. Nomura, K. Takagi and S. Sato, Finite element simulation of sound propagation concerning meteorological conditions, IJNMF, Vol.64, pp.1296-1318, 2010.
- 2) 野村卓史, 高木耕平: 気象要因の影響を考慮した音の伝播に関する有限要素解析法, 土木学会応用力学論文集, Vol.9, pp.221-230, 2006.