

Sliding Interface を適用した非適合メッシュによる移流拡散解析

日本大学 正会員 ○長谷部寛
 日本大学大学院 (研究当時) 長井耀太郎
 日本大学 フェロー 野村卓史

1. はじめに

有限要素法は解析する領域を隙間なく有限要素で分割し、要素ごとに作成された離散化方程式を重ね合わせて全体の方程式を構築する解析法である。そのため、通常は節点が隣り合う要素の辺上に位置することのない適合メッシュを用いて解析が行われる。Y. Bazilevsらはヘリコプターのプロペラが回転する解析のために、非適合な界面上でも解析を成立させることのできる特殊な条件 sliding interface^{1), 2)} を考案した。

Sliding interface は図1のような非適合な界面上で解を連続させるための条件である。このような非適合部を有するメッシュを用いることが可能となれば、メッシュ生成の自由度がさらに広がるとともに、移動境界問題への応用も可能である。そこで本研究では移流拡散問題を対象に sliding interface の実装およびその特性を検討した。

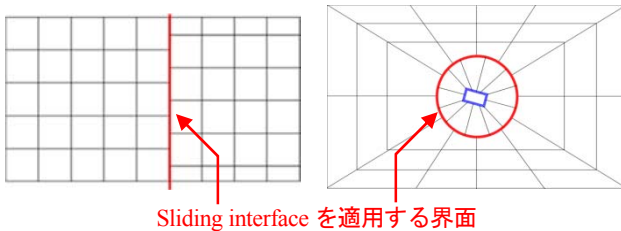


図1 Sliding interface を適用した解析メッシュの例

2. 移流拡散問題への sliding interface の適用

本研究では未知変数がスカラー量である移流拡散問題を対象に sliding interface の特性を検討した。移流拡散問題の支配方程式は次式 (1) で表される。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u_j \frac{\partial \phi}{\partial x_j} - k \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j^2} = 0 \quad (1)$$

ここで、 ϕ は濃度、 u_j は流速、 k は拡散係数である。

非適合な界面を有さない適合メッシュで解析する場合は、通常式 (1) を SUPG 法³⁾ に基づいて離散化する。SUPG 法に基づき離散化された方程式は次式 (2) となる。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} q_h \left(\frac{\partial \phi_h}{\partial t} + u_j \frac{\partial \phi_h}{\partial x_j} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial q_h}{\partial x_j} \left(k \frac{\partial \phi_h}{\partial x_j} \right) d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{N_{el}} \tau_s \int_{\Omega_e} u_k \frac{\partial q_h}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \phi_h}{\partial t} + u_j \frac{\partial \phi_h}{\partial x_j} - k \frac{\partial^2 \phi_h}{\partial x_j^2} \right) d\Omega \\ & = \int_{\Gamma} q_h \left(k \frac{\partial \phi_h}{\partial x_j} \right) n_j d\Gamma \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、 q は重み関数、 n_j は界面上の外向き法線ベクトル、 Ω は解析領域、 Γ は解析領域の境界を表す。 N_{el} は要素数、 τ_s は SUPG 法の安定化パラメータである。

Sliding interface を用いて非適合な界面で連続する解を得るためには、式 (2) の左辺に新たに以下の3つの項を加えることが提案されている。

$$\begin{aligned} & - \sum_{eb=1}^{N_{eb}} \int_{\Gamma_{eb}} (q_h^L - q_h^R) \frac{1}{2} \left(k \frac{\partial \phi_h^L}{\partial x_j} n_j^L - k \frac{\partial \phi_h^R}{\partial x_j} n_j^R \right) d\Gamma \\ & - \sum_{eb=1}^{N_{eb}} \int_{\Gamma_{eb}} \frac{1}{2} \left(k \frac{\partial q_h^L}{\partial x_j} n_j^L - k^R \frac{\partial q_h^R}{\partial x_j} n_j^R \right) (\phi_h^L - \phi_h^R) d\Gamma \\ & + \sum_{eb=1}^{N_{eb}} \int_{\Gamma_{eb}} \left\{ (q_h^L - q_h^R) \tau_{eb} (\phi_h^L - \phi_h^R) \right\} d\Gamma \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、 Γ_{eb} は sliding interface を適用する界面を表す。第1項がフラックスの連続性を保つための項、第2項が解の安定性を保つための項、第3項が未知変数 (濃度) の連続性を保つための項である。添え字の L, R はそれぞれ図1で示した非適合な界面に対して、左側のメッシュの界面、右側のメッシュの界面を表す。 τ_{eb} は安定化パラメータ¹⁾であり、 $\tau_{eb} = C_{eb} h/k$ と定義される。 h は界面上の要素の代表長さ、 k は拡散係数、 C_{eb} は定数であり 4.0 が推奨されている。

3. 非適合界面の扱い

Sliding interface を適用するための境界積分項 [式 (3)] を展開すると、左側界面上と右側界面上の関数の積が存在することが分かる。たとえば第3項を展開すると次式となる。

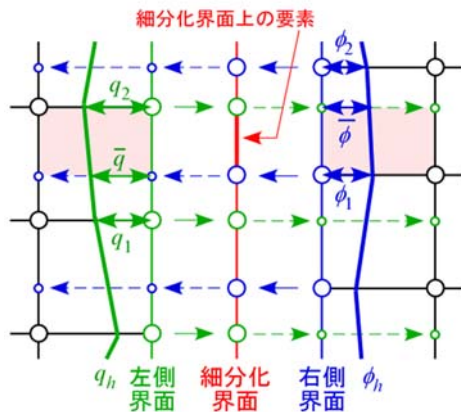


図3 細分化界面と節点値

$$\sum_{eb=1}^{N_{eb}} \int_{\Gamma_{eb}} \tau_{eb} (q_h^L \phi_h^L - q_h^L \phi_h^R - q_h^R \phi_h^L + q_h^R \phi_h^R) d\Gamma \quad (4)$$

これらの項を扱うために左側界面と右側界面の間に新たに図2に示す細分化界面を作成した。細分化界面には両側の界面上の節点を投影し、投影された節点間を細分化界面上の要素と見なした。投影された節点の節点値は、図中の $\bar{q}$ 、 $\bar{\phi}$ のように、本来の節点値から内挿して求めた。式(3)の第1項や第2項に含まれる重み関数 q や濃度 ϕ の勾配は、細分化界面上の要素にあわせて両側界面上の要素を細分化し、その要素の節点値から評価した。

4. 移流拡散問題の解析条件と解析結果

図4(a)～(c)に示す通常の適合メッシュ、解析領域の中央で非適合な界面を有するメッシュ、円形の非適合界面を有するメッシュを用いて、sliding interfaceの効果を確かめる解析を行った。解析領域長さは1.0m、高さは0.465mとした。移流速度 u は1.0 m/s、拡散係数 k は1.0 m²/s、時間積分間隔 Δt は0.001sとして解析を行った。

解析結果を図5(a)～(c)に示す。非適合な界面を有するメッシュにおいても、一様に濃度が移流する結果となり、適合メッシュと同様に、界面で解の連続性が保持された。非適合な鉛直界面を有するメッシュ[図5(b)]と適合メッシュ[図5(a)]の結果はほぼ一致している。一方で、非適合な円形界面を有するメッシュは、界面付近の濃度が僅かながら高まった。しかし、適合メッシュの解を基準とした相対誤差は5%未満である。

5. まとめ

本研究では、有限要素解析の解析メッシュ生成の自由度向上、移動境界問題への応用を見据え、非適合な界面を有するメッシュを用いた有限要素解析法を構築

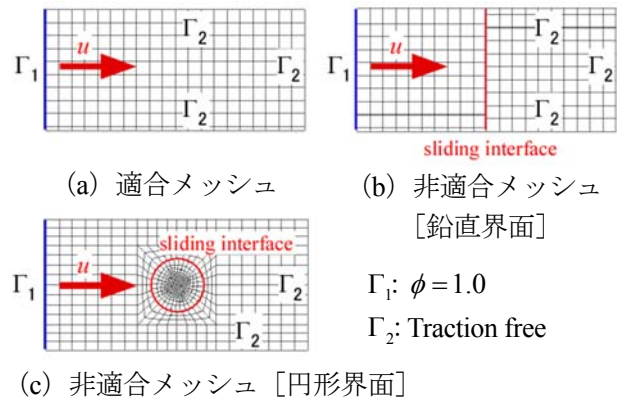


図4 解析メッシュと境界条件

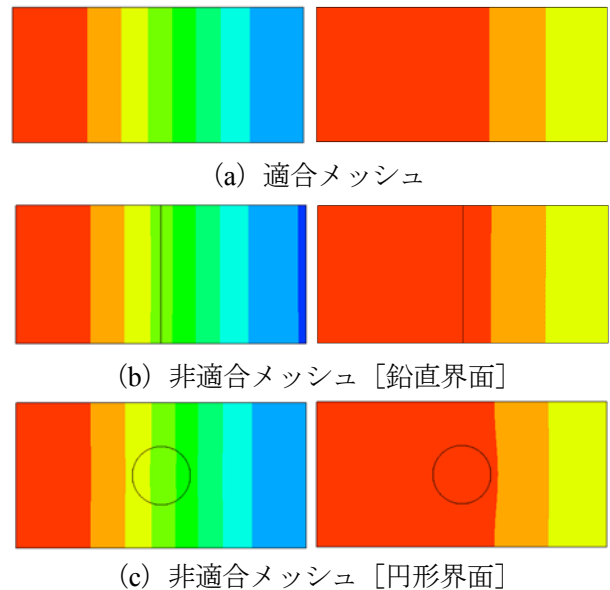


図5 解析結果 (左: 0.05 秒時, 右 0.10 秒時)

することを目的として、sliding interfaceを適用した非適合メッシュによる移流拡散問題を行った。Sliding interfaceを用いるために新たに付加される境界積分項を計算するため、細分化界面を導入し、非適合な界面の処理を行った。その結果、非適合な界面の形状によらず、界面上での解の連続性が保たれた。

解の精度に着目すると、適合メッシュの解析結果を参照解とした相対誤差は、数%未満であったが、今回検討したのは比較的単純なメッシュ、解析条件であったことから、より多くの検討を重ねる必要があると考える。

【参考文献】

- 1) Y.Bazilevs et al.: NURBS-based isogeometric analysis for the computation of flows about rotating components, Comput Mech(2008) vol43:pp143-150, 2008
- 2) Y.Bazilevs et al.: Computational Fluid-Structure Interaction, WILEY, 2013
- 3) 日本計算工学会流れの有限要素法研究委員会: 続・有限要素法による流れのシミュレーション, 2012