DG-FEM に基づく移動境界処理を考慮した浅水長波流れ解析

中央大学 学生員 ○ 花澤 広貴
中央大学 学生員 伊藤 翔
(株) エイト日本技術開発 正会員 大川 博史
中央大学 正会員 樫山 和男

1. はじめに

近年, 地震に伴う津波, 台風や豪雨に伴う高潮, 洪水などの水害が深刻化してきている．これらの被害を予測する手段として, 数値シミュレーションが広く用いられており, その精度の向上が求められている．津波, 高潮, 洪水などの現象を表す数値モデルは, 双曲型偏微分方程式に分類される．双曲型問題は不連続な解を有しやすく, これを精度よく表現するためには比較的細かなメッシュが必要とされる．双曲型方程式に対する有効な解析手法の一つとして, Discontinuous Galerkin 有限要素法 (以下 DG 法) に関する研究が多くなされてきている．DG 法は保存則を満足するとともに, 要素間の不連続性を許容する手法であり, 高次要素の適用が容易という特徴を有する．そのため, 比較的粗いメッシュを用いても不連続な現象をより精度よく表現することが可能である．本研究では, DG 法を用いた津波解析手法の構築を行うことを目的とし、遡上問題への適用の手段として、移動境界条件処理手法の導入を行った．また, その妥当性の検討のため, 数値解析例としてダムブレイク問題を扱った.

2. 数値解析手法

(1) 基礎方程式

支配方程式には，以下に示す 1 次元浅水長波方程式を用いる.

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = \mathbf{S}(\mathbf{U}), \qquad (1)$$

ここで，$\mathbf{U}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{S}$ はそれぞれ未知変数, 流束関数, ソース項に関するベクトルであり, 以下のように表される.

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} H \\ uH \end{bmatrix}, \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} uH \\ u^2H + \frac{1}{2}gH^2 \end{bmatrix}, \qquad (2)$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -gH(S_0 + S_f) \end{bmatrix}, \qquad (3)$$

ここで, H は全水深, u は断面平均流速, g は重力加速度, S_0 は水底勾配, S_f は底面せん断応力であり, S_0, S_f は以下のように表される．なお, z は基準面からの高さ, n はマニングの粗度係数である.

$$S_0 = \frac{\partial z}{\partial x}, S_f = \frac{gn^2u \mid u \mid}{H^{\frac{1}{3}}}. \qquad (4)$$

(2) 空間方向の離散化

支配方程式 (1) に対して，空間方向の離散化として一次要素を用い，重み付き残差法を適用すると以下に示す弱形式が得られる.

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} v\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}dx - \int_{x_{j-1}}^{x_j} \mathbf{F}\frac{\partial v}{\partial x}dx + \hat{F}_j\gamma_{in}v\Big|_{x_{j-1}}^{x^j} = \int_{x_{j-1}}^{x_j} v\mathbf{S}dx, \qquad (5)$$

ここで, v は重み関数, $\hat{F}_j$ は数値フラックス, $\gamma_{in}v$ は v の要素境界での値である．未知変数及び重み関数を補間近似する際, 基底関数には Legendre 多項式を用いる．なお, 各係数行列の計算には数値積分法を用いる.

(3) 数値フラックス

DG 法では, 要素境界で物理量を複数有するため, 数値フラックスを用いて要素境界での値を近似する．その際に用いる数値フラックスとして, 本研究では以下に示す Local-Lax Friedrich Flux を用いる.

$$\hat{\mathbf{F}}_j = \frac{1}{2}\Big\{\mathbf{F}(\mathbf{U}_j^-) + \mathbf{F}(\mathbf{U}_j^+)\Big\} - \frac{a_{max}}{2}(\mathbf{U}_j^+ - \mathbf{U}_j^+), \qquad (6)$$

ここで, a_{max} は以下のように表される.

$$a_{max} = max(\mid u^+ - c^+ \mid, \mid u^- - c^- \mid, \mid u^+ + c^+ \mid, \mid u^- + c^- \mid),$$

$$c^- = \sqrt{gH^-}, c^+ = \sqrt{gH^+} \qquad (7)$$

(4) 時間方向の離散化

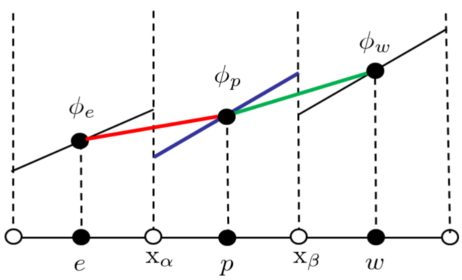
式 (5) は以下のような時間に関する常微分方程式として表される.

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{L}(\mathbf{U}). \qquad (8)$$

式 (8) に対して、時間方向の離散化として 2 段階 2 次精度陽的 Runge-Kutta 法を適用する.

(5) slope limiter 処理

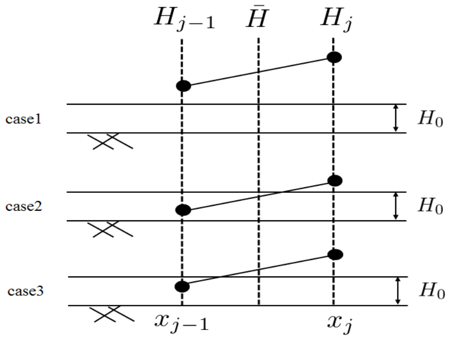
段波などの不連続面を生じる問題において発生するオーバーシュートやアンダーシュートに対して、本研究では MUSCL の slope limiter 処理手法[1] を適用する．slope limiter 処理では, 要素 p に着目したとき, 要素 p 及び隣り合う要素 e, w の中心座標における物理量を用いて得られる線形関数の傾きを比較し, 節点値を修正する．以下に, そのアルゴリズムを示す.



図－1 1 次元要素モデル

KeyWords： DG 有限要素法，浅水長波方程式，slope limiter 処理, 移動境界条件処理

連絡先： 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 TEL：03-3817-1815 E-mail：hanazawa@civil.chuo-u.ac.jp



図－２ 移動境界の概念図

1. 要素 p の線形関数を L_p(図 1 青線), 要素 e と p で作られる線形関数を L_{ep}(図 1 赤線), 要素 w と p で作られる線形関数を L_{wp}(図 1 緑線) とする.
2. 各線形関数の勾配 ∇L の符号を比較し, 全て同じ符号なら勾配が最小の線形関数を要素 p の線形関数として置き換え, 節点値を修正する. それ以外の場合は, 各節点値を中心座標での物理量 ϕ_p とする.

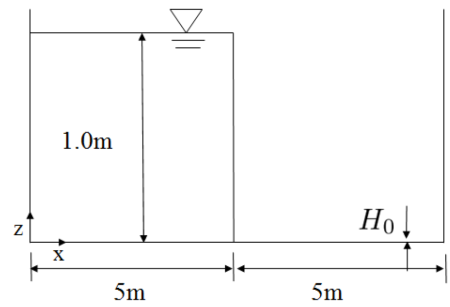
(6) 移動境界条件処理手法

遡上問題を取り扱うための移動境界条件処理手法[2]を以下に示す. **図-2** に示すように, 予め陸域に微小水深 H_0 を設定する. 全ての要素において, 以下のアルゴリズムに従い水域, 陸域の判定を行い水深及び流量の補正を行う.

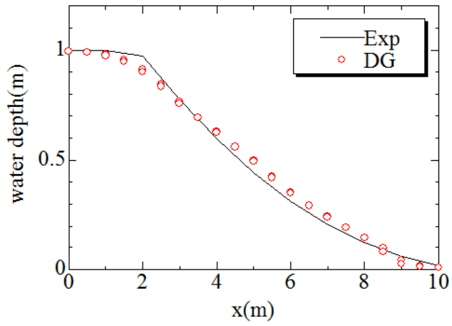
1. 全節点の水深が微小水深より大きい場合
$(H_{j-1} \geq H_0,\, H_j \geq H_0)$：
$$\hat{H_j} = H_j, \hat{H_{j-1}} = H_{j-1}$$
$$\hat{q_j} = q_j, \hat{q_{j-1}} = q_{j-1}$$
2. 要素内の平均水深が微小水深より小さい場合
$(\bar{H} \geq H_0)$：
$$\hat{H_j} = \bar{H}, \hat{H_{j-1}} = \bar{H}$$
$$\hat{q_j} = 0, \hat{q_{j-1}} = 0$$
3. 要素内の平均水深が微小水深より大きくかつ, 一方の節点の水深が微小水深より小さい場合
$(\bar{H} \geq H_0,\, H_j \geq H_0)$：
$$\hat{H_j} = H_j - (H_0 - H_{j-1}), \hat{H_{j-1}} = H_0$$
$$\hat{q_j} = q_j + q_{j-1}, \hat{q_{j-1}} = 0$$

3. 数値解析例

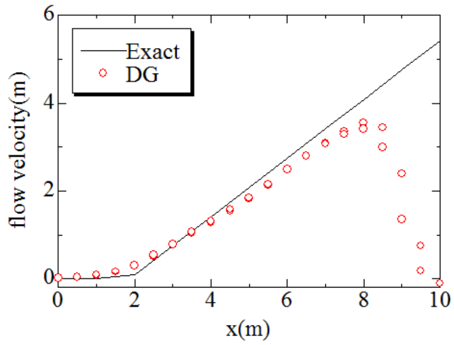
本手法の妥当性を検証するために, 数値解析例としてダムブレイク問題を取り扱う. **図-3** に示すような初期水位を与え, 境界条件として両端で完全反射条件を与える. メッシュ分割幅は 0.5m, 微小時間増分量は 0.01s, 微小水深は 0.002m とする. **図-4**, に 1 秒後の水深分布及び流速分布を示す. これらから, DG 法の解は厳密解と良い一致を示しており, 本手法の妥当性が確認された. また, 陸域の計算を安定に行えていることから, 移動境界条件処理手法の妥当性が確認された.



図－３ 数値解析モデル (ダムブレイク)



図－４ 1.0 秒後の水深図



図－５ 1.0 秒後の流速図

4. おわりに

本研究では DG 有限要素法に基づく津波解析手法構築の基礎段階として, 1 次元浅水長波方程式を用いたダムブレイク問題に対して DG 法を適用し、その結果以下の結論を得た.

- DG 法の結果は厳密解と良い一致を示しており, 本手法の妥当性が確認された.
- 陸域の計算が安定に行えており, 移動境界条件処理手法の妥当性が確認された.

今後の課題として, 2 次元問題への拡張及び高次要素での解析が挙げられる.

参考文献

1) V.Guinot, C.Delenne： MUSCL schemes for the shallow water sensitivity equations with passive scalar transport, *Comput. Fluids*, 59, pp.11-30, 2012.
2) S.Bunya, E.J.Kubatko, J.J.Westerink, C.Dawson：A wetting and drying treatment for the Runge-Kutta discontinuous Galerkin solution to the shallow water equations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 198, pp.1548-1562, 2009.