

DG 有限要素法による浅水長波流れ解析における数値フラックスに関する検討

中央大学大学院 学生員 ○ 伊藤 翔
中央大学大学院 学生員 花澤 広貴
(株) エイト日本技術開発 正会員 大川 博史
中央大学 正会員 榎山 和男

1. はじめに

津波、高潮、河川の氾濫などの数値シミュレーションには、浅水長波方程式が広く用いられる。浅水長波方程式は双曲型の方程式であり、不連続な解を有する。したがって、要素の境界で不連続性を許容する DG(Discontinuous Galerkin) 法に基づく有限要素法が、浅水長波方程式の高精度な解法として有効であるといえる。

本研究では、1 次元の非線形浅水長波方程式に対して DG 法に基づく有限要素法を適用し、段波問題において厳密解と比較することで本手法の有効性を検証する。また、異なる数値フラックスを用いた場合の計算精度の差異について検討を行う。

2. 数値解析手法

(1) 基礎方程式

基礎方程式として、以下に示す 1 次元の非線形浅水長波方程式を用いる。

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = S(U) \quad (1)$$

ここで、関数 U は保存変数、 $F(U)$ は流束関数、 $S(U)$ はソース項であり、それぞれ以下のように定義される。

$$U = [H, q]^T \quad (2)$$

$$F(U) = [q, \frac{q^2}{H} + g\frac{H^2}{2}]^T \quad (3)$$

$$S(U) = [0, -gH\frac{\partial z}{\partial x}]^T \quad (4)$$

ここで、 H は全水深、 q は流量、 g は重力加速度、 z は基準面からの底面の高さである。

(2) 空間方向の離散化

式 (1) に対して試験関数 v を掛け、部分積分を行うと、以下の弱形式が得られる。

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{\partial U}{\partial t} v dx - \int_{x_{j-1}}^{x_j} F \frac{\partial v}{\partial x} dx + Fv \Big|_{x_{j-1}}^{x_j} = \int_{x_{j-1}}^{x_j} Sv dx \quad (5)$$

上式に対して、数値フラックスと数値積分を適用する。

a) 数値フラックス

本研究では、2 種類の数値フラックスを用いる。まず、1 つ目として次式で定義される Local Lax-Friedrichs (LLF) flux²⁾を用いる。

$$\hat{F} = \frac{1}{2} [\{F(U^-) + F(U^+)\} - a_{max}(U^+ - U^-)] \quad (6)$$

ここで、 a_{max} は次のように定義される $a_1 \sim a_4$ の中で最大の値となるものを用いる。

$$a_{max} = \max(a_1 = |v^+ - c^+|, a_2 = |v^- - c^-|, a_3 = |v^+ + c^+|, a_4 = |v^- + c^-|) \quad (7)$$

ここで、 v は流速、 c は波速を表し、添え字 $+$ 、 $-$ はそれぞれ要素の左端、右端の値であることを表している。

次に、2 つ目として次式で定義される Harten-Lax-van Leer (HLL) flux³⁾を用いる。

$$\hat{F} = \begin{cases} F^- & (0 \leq S_L) \\ \frac{S_R F^- - S_L F^+ + S_L S_R (U^+ - U^-)}{S_R - S_L} & (S_L \leq 0 \leq S_R) \\ F^+ & (S_R \leq 0) \end{cases} \quad (8)$$

ここで、

$$F^- = F(U^-) \quad (9)$$

$$F^+ = F(U^+) \quad (10)$$

$$S_L = \min(v^- - c^-, v^+ - c^+) \quad (11)$$

$$S_R = \max(v^- + c^-, v^+ + c^+) \quad (12)$$

b) 数値積分

係数行列の計算のために数値積分を適用する。本研究では、補間多項式にルジャンドル多項式を用い、数値積分として、 $n+1$ 次のルジャンドル・ガウス公式を用いる。

数値フラックスと数値積分により式を整理すると、以下の有限要素方程式が得られる。

$$M_j \dot{U}_j = \Phi_n'^T W_n F(\Phi_n U_j) + \Phi^+ \hat{F}_{j-1} - \Phi^- \hat{F}_j + \frac{x_j - x_{j-1}}{2} \Phi_n'^T W_n S(\Phi_n U_j) \quad (13)$$

ここで、 M_j は質量行列、 Φ_n は補間多項式の行列、 W_n は積分点の重みの行列であり、ルジャンドル多項式の直交性の性質より、 M_j は対角行列となり、陽的に解が求まる。

(3) 時間方向の離散化

時間方向の離散化には $p+1$ 段階、 $p+1$ 次の Runge-Kutta 法を用いる。ここで、 p は補間多項式の次数である。

(4) Moment Limiter

オーバーシュート等を抑えるために、本研究では、以下のように定義される Moment Limiter を用いる。

$$\tilde{U}_j^p = \minmod(U_j^p, \beta_p(U_{j+1}^{p-1} - U_j^{p-1}), \beta_p(U_j^{p-1} - U_{j-1}^{p-1})) \quad (14)$$

ここで、 U_j^p は要素 j の p 次の補間多項式にかかる係数、 β_p は以下のように定義される値である。

$$\beta_p = \frac{\sqrt{p-1/2}}{\sqrt{p+1/2}} \quad (15)$$

KeyWords: 浅水長波, Discontinuous Galerkin 法, Local Lax-Friedrichs flux, Harten-Lax-van Leer flux, 数値フラックス
連絡先: 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 TEL. 03-3817-1808 Email: s.ito@civil.chuo-u.ac.jp

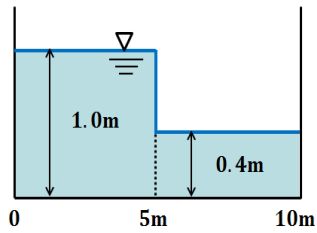


図-1 解析モデル

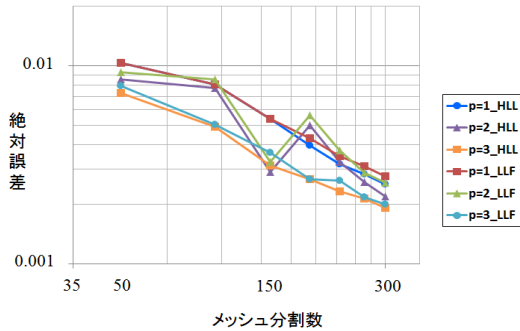


図-2 絶対誤差とメッシュ分割数の関係

また, $\minmod$ 関数は, 関数の成分の符号がすべて一致しないとき 0 の値を取り, すべて一致するとき以下のような値を取る.

$$\minmod(a, b, c) = \text{sgn}(a) \min(|a|, |b|, |c|) \quad (16)$$

各要素で $\tilde{U}_j^p = U_j^p$ となるか, もしくは U_j^1 を処理するまで Limiter 処理を繰り返す.

3. 数値解析例

数値解析例として段波問題を取り上げ, 本手法の有効性を検証するため厳密解との比較を行う. また, 異なる数値フラックスを用いた場合の計算精度の差異の検討も行う.

(1) 解析条件

解析モデルを図-1に示す. 両端で完全反射条件, 微小時間増分量を $\Delta x / (|c|(2p+1))$ とし, 波速 c は初期最大水深 10m での値とする. また, 異なる数値フラックスを用いて解析を行い, それぞれにおいて補間次数とメッシュ分割数を変更して, 1.0s 後の水深に関して誤差を評価する.

(2) 解析結果

図-2は異なる数値フラックスを用いた解析において補間次数とメッシュ分割数を変更し, 厳密解との誤差の評価を行ったものである. 図より, 異なる数値フラックスを用いた場合, 誤差の増減の傾向に類似性はあるが, 値に差異があることが確認できる. また, 同等である箇所を除けば, どの補間次数においても LLF flux と比べて HLL flux を用いた解析の方が, より誤差が少なくなることが確認できる. 図-3~5は分割数 200, $p=2$ の時の 1.0s 後の水深分布である. 図より, 領域 A においては HLL flux を用いた解析の方がより厳密解とよい一致を示していることが確認できる. また, 領域 B においても HLL flux による解析は, 各節点において平均値で考えると, より厳密解とよい一致を示していることが確認できる.

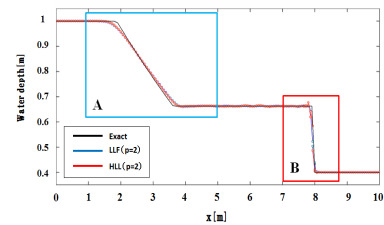


図-3 1.0s 後の水深分布

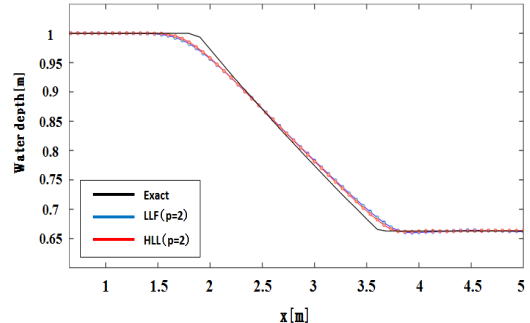


図-4 水深分布 (領域 A)

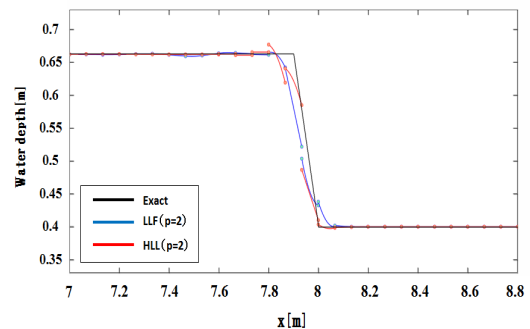


図-5 水深分布 (領域 B)

4. おわりに

本研究では, 非線形浅水長波方程式に対して DG 法を適用し, 段波問題において DG 法の有効性と異なる数値フラックスを用いた時の精度の検証を行い, 以下の結論を得た.

- 異なる数値フラックスを用いることで解析精度に差異が生じることが確認できた.
- HLL flux を用いた解析の方が LLF flux を用いた解析よりも, より厳密解とよい一致を示し, 誤差が少ないことが確認できた.

今後の課題としては, 2次元解析への拡張, 移動境界条件処理の導入, 更なる他の数値フラックスや limiter 処理を用いた際の解析結果との比較等が挙げられる.

参考文献

- 1) E. J. Kubatko, J. J. Westerink, Clint Dawson : hp Discontinuous Galerkin methods for advection dominated problems in shallow water flow, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.196, No.1-3, pp.437-451, 2006.
- 2) G. Kesserwani, R. Ghostine, J. Vazquez, A. Ghenaïm, R. Mose : Riemann Solvers with Runge-Kutta Discontinuous Galekin Schemes for the 1D Shallow Water Equations, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol.134, No.2, pp.243-255, 2008.
- 3) A. Harten, P. D. Lax, B. van Leer : On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws, *SIAM Rev.*, Vol.25, No.1, pp.35-61, 1983.