

単調載荷時のバラスト道床の弾塑性有限要素解析結果におけるバラスト材の Young 率の空間変動の影響

新潟大学大学院自然科学研究科 学生員 井口 建斗
新潟大学大学院自然科学研究科 正会員 紅露 一寛
新潟大学工学部建設学科 正会員 阿部 和久

1. はじめに

国内外の鉄道路線で広く用いられているバラスト道床は、列車の走行に伴う繰り返し荷重の作用により道床沈下等を引き起こす。そのため、当研究室ではバラスト道床を弾塑性連続体でモデル化し、道床沈下量の定量評価を試みてきた¹⁾。中でも、Cyclic densification モデル²⁾は、解析時の計算負荷の面からその実用化が期待されている。しかし、バラスト材は碎石粒子の形状や配置の空間的不均一性に起因して、その弾塑性挙動は空間的に変動すると考えられる。しかし、既往の研究ではこの変動の影響については未検討である。本研究では、Cyclic densification モデルを対象に、単調載荷時のバラスト道床の弾塑性解析結果におけるバラスト材の Young 率の空間変動の影響を評価・検討する。

2. Cyclic densification モデルを用いた単調載荷解析

Cyclic densification モデル²⁾は、単調載荷モデルと繰り返し載荷モデルにより構成される。本研究で対象とする単調載荷解析では、修正 Drucker-Prager モデルからなる単調載荷モデルを用いる。構成則は微小変形を仮定し、次の亜弾性構成式で与える。

$$\dot{\sigma}_{ij} = D_{ijkl}(\dot{\epsilon}_{kl} - \dot{\epsilon}_{kl}^p) \quad (1)$$

ここで σ_{ij} は応力テンソル、 $(\cdot)$ は物質時間微分であり、弾性係数テンソル D_{ijkl} は線形性を仮定して次式で与える。

$$D_{ijkl} = \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-2\nu)(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + 2\nu\delta_{ij}\delta_{kl}] \quad (2)$$

ここで、 E は Young 率、 ν はポアソン比である。

単調載荷時の塑性変形は、摩擦すべり・体積圧縮・引張破壊の3つのメカニズムについて考える。摩擦すべりの降伏条件は次式の Drucker-Prager の条件で与える。

$$f^f(q, p, \kappa_0^p) = -\frac{q}{p - p_{num}^t} - H^f(\kappa_0^p) = 0 \quad (3)$$

ここで、 $p = \sigma_{kk}/3$, $q = \sqrt{\frac{3}{2}(S_{ij}S_{ij})}$, $S_{ij} = \sigma_{ij} - p\delta_{ij}$ であり、 κ_0^p は摩擦すべりに関する塑性乗数速度である。

一方、体積圧縮・引張破壊に関する降伏条件は次式で与える。

$$f^c(p, \epsilon_{vol,c,0}^p) = -\frac{p}{p_0} - H^c(\epsilon_{vol,c,0}^p) = 0 \quad (4)$$

$$f^t(p) = p - p^t = 0 \quad (5)$$

ここで、 $\epsilon_{vol,c,0}^p$ は体積圧縮に関する塑性乗数速度であり、 H^f, H^c は次式で与える。

$$H^f(\kappa_0^p) = H_0 + (H_m - H_0)[1 - \exp(-\zeta^f \cdot \kappa_0^p)] \quad (6)$$

$$H^c(\epsilon_{vol,c,0}^p) = 1 + \zeta^c \cdot \epsilon_{vol,c,0}^p \quad (7)$$

また、流動則は次の非関連流動則で与える。

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\kappa}_0^p m_{ij}^f + \dot{\epsilon}_{vol,c,0}^p m_{ij}^c + \dot{\epsilon}_{vol,t,0}^p m_{ij}^t \quad (8)$$

ここで、 $\dot{\epsilon}_{vol,t,0}^p$ は引張破壊に関する塑性乗数速度である。また、 $m_{ij}^f, m_{ij}^c, m_{ij}^t$ 流動方向規定テンソルである³⁾。

3. Young 率の空間変動を考慮したスペクトル有限要素法

本研究では、Young 率の空間変動の影響を評価するために、スペクトル確率有限要素法に基づく Anders & Hori の方法³⁾を用いる。空間変動は Young 率 E についてのみ考えることとし、定式化では bounding body 近似を用いる。bounding body 近似は、弾性ひずみエネルギー速度 $\dot{U}^e$ の期待値が、次式の上下界を持つことに立脚する。

$$J'(\dot{\mathbf{u}}; \langle \mathbf{D} \rangle) < \langle \dot{U}^e \rangle < I'(\dot{\sigma}; \langle \mathbf{D}^{-1} \rangle) \quad (9)$$

ここで、 J' は全ポテンシャルエネルギー速度、 I' は Prager の適合条件およびつり合い条件についての制約条件つきひずみエネルギー速度である。bounding body は、弾性係数テンソルが $\mathbf{D}^+ = \langle \mathbf{D}^{-1} \rangle^{-1}$ 、または $\mathbf{D}^- = \langle \mathbf{D} \rangle$ で与えられる物体 V^+, V^- とする。

当該のつり合い問題の有限要素法では、第 i 荷重ステップでの第 j N-R 反復で解く代数方程式が次式で与えられる。

$$[j^{-1} \mathbf{K}_i(E(\omega), j^{-1} \boldsymbol{\sigma}_i(\omega))] \{j \Delta \mathbf{U}_i(\omega)\} = \{\mathbf{F}_i^{ext}\} - \{j^{-1} \mathbf{F}_i^{int}(\omega)\} \quad (10)$$

Key Words: バラスト道床沈下, Young 率の空間変動, スペクトル確率有限要素法

連絡先: 〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050 番地 TEL: 025(262)7274, FAX: 025(262)7274

ここで, ω は確率変数, $\mathbf{F}_i^{ext}$ は等価節点力ベクトルである.
まず, 式 (10) の接線剛性行列 ${}^{j-1}\mathbf{K}_i$ を, 次式で近似する.

$$[{}^{j-1}\mathbf{K}_i(E(\omega), {}^{j-1}\boldsymbol{\sigma}_i(\omega))] \approx [{}^{j-1}\mathbf{K}_i(E(\omega), {}^{j-1}\boldsymbol{\sigma}_i^\pm)] \quad (11)$$

なお, $\boldsymbol{\sigma}^\pm$ は bounding body $V^\pm$ で評価される応力で, その増分は全ひずみ増分の期待値をもとに与えられる. 一方, 式 (10) の内力ベクトル ${}^{j-1}\mathbf{F}_i^{int}$ は, その期待値によって次式のように近似する.

$$\{{}^{j-1}\mathbf{F}_i^{int}(\omega)\} \approx \langle \{{}^{j-1}\mathbf{F}_i^{int}\} \rangle \quad (12)$$

最後に, E の Karhunen-Loeve 展開, $\{^j\Delta\mathbf{U}_i\}$ の polynomial chaos 展開をそれぞれ次式で与える.

$$E = \langle E \rangle \left(1 + \sum_{l=0}^M \xi_l \sqrt{\lambda_l} \phi_l \right) \quad (13)$$

$$\{^j\Delta\mathbf{U}_i\} = \sum_{l=0}^{L-1} \{^j\Delta\mathbf{U}_i^{(l)}\} \Psi_l(\xi) \quad (14)$$

ここで, ξ_m は確率変数, $\sqrt{\lambda_m}, \phi_m$ は共分散関数の固有値, 固有関数である. また, Ψ_l は正規化された polynomial chaos である. 式 (11) - (14) を式 (10) に代入し, Ψ_l を重みとした確率空間での Galerkin 法を適用すると, 各増分ステップ, 各 N-R 反復で解く代数方程式を得る.

4. 解析結果

バラスト軌道を模擬した解析領域を図 1 に示す. 解析では, Young 率 E の変動係数, 相関長さを変化させた計算を行い, A 点・B 点(図 1 参照)における最大荷重作用時の変位の変動について検討する. 解析結果は図 2-図 4 に示す. 変位は下向きを正とし, 図中の実線は変位の期待値, 点線は変位の期待値 $\pm$ 標準偏差を表す. 図 2 は, A 点・B 点での変動係数 15%・相関長さ 0.25m としたときの荷重-変位関係である. 図より, 入力データである Young 率の変動係数 15% に対して, 変位の変動係数は 10% 程度と変動の度合いは若干小さく現れている. また, 図 3・図 4 は図 2 に対して, それぞれ変動係数・相関長さを変化させたものである. 図 2 と図 3 を比較すると, 変動係数を 15% から 1% へ減少させた場合, 変位の変動係数も同様に 10% から 0.6% に減少している. 一方, 図 2 と図 4 を比較すると, 相関長さを 0.25m から 0.1m へ減少させた場合, 変位の変動係数は 10% から 5% に減少している. これらの傾向は変位の観測位置によらないことがわかった. 今後は, 繰り返し载荷モデルについて同様の検討を行うこととしたい.

謝辞

本研究は JSPS 科研費 15K06177 の助成を受けたものです.

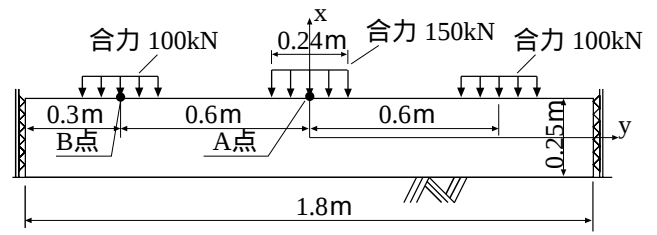


図 1 解析領域

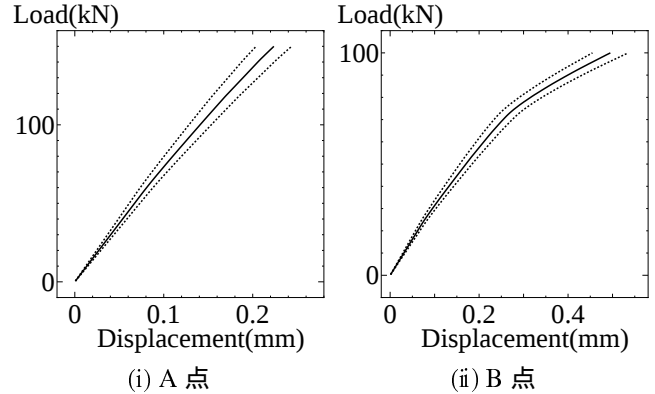


図 2 変動係数 15%, 相関長さ 0.25m の荷重-変位関係

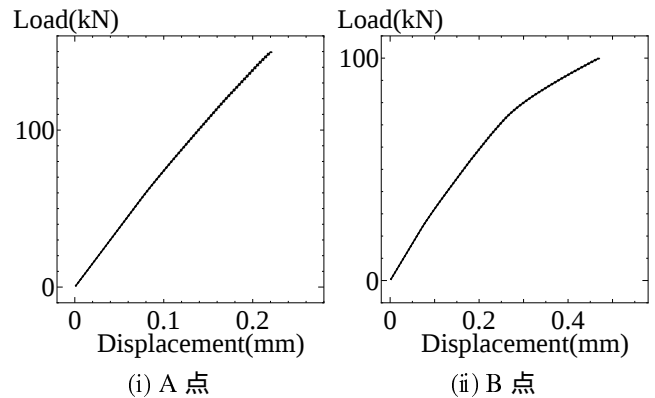


図 3 変動係数 1%, 相関長さ 0.25m の荷重-変位関係

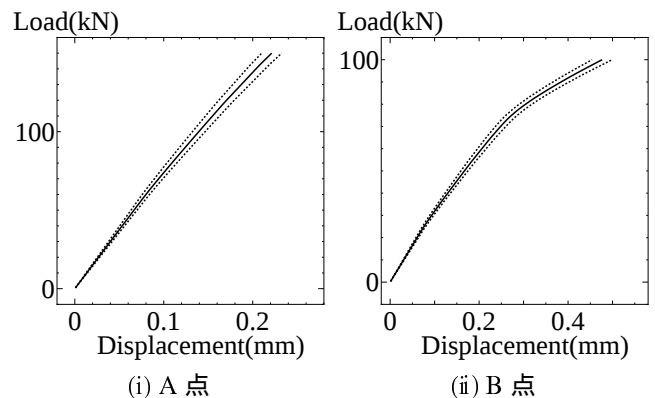


図 4 変動係数 15%, 相関長さ 0.1m の荷重-変位関係

参考文献

- 1) 相田真人, 紅露一寛, 阿部和久: まくらぎの浮きを考慮した軌道振動・道床沈下連成解析, 土木学会鉄道工学シンポジウム論文集, Vol.19, pp.127-134, 2015.
- 2) Suiker, A.S.J. & de Borst, R.: A numerical model for the cyclic deterioration of railway tracks. *Int.J.Numer.Meth.Engng.*, Vol.57, pp.441-470, 2003.
- 3) Anders, M. & Hori, M.: Stochastic finite element method for elasto-plastic body. *Int.J.Numer.Meth.Engng.*, Vol.46, pp.1897-1916, 1999.