時間領域DG-FEMに基づく騒音伝播解析手法の構築

中央大学大学院　学生員　○中村　和寛
中央大学　正会員　樫山　和男
(株) 建設環境研究所　正会員　志村　正幸

1. はじめに

都市部における交通施設の計画・設計を行う上で，数値シミュレーションを用いて騒音レベルを予測することは重要であり，様々な方法が提案されている．その中でも近年注目されている手法として，Dicontinuous Galerkin（DG）法[1) 2)]がある．

本論文では，DG 法に基づく有限要素法の妥当性と有効性を検証するため，滑らかな初期波形である sin 波と不連続な初期波形である矩形波の 2 種類を用いた 1 次元波動伝播問題を取り上げ，波長分割数，微小時間増分量 Δt 及び要素の次数を変えた解析結果を理論解，CIP 法[3)]との比較を行った．

2. 数値解析手法

(1) 支配方程式

本研究で扱う支配方程式は，空気中の波動伝播を考慮した 1 次元の連続式と運動方程式とし，保存型表記すると以下のようになる．

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

ここで，$\mathbf{U}$, $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ は保存変数と流速関数であり，以下のように定義する．

$$\mathbf{U} = [p, u]^{\mathrm{T}} \tag{2}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}) = [\rho c^2 u, \frac{p}{\rho}]^{\mathrm{T}} \tag{3}$$

また，p, u, c, ρ は音圧，粒子速度，音速，空気の密度である．

(2) DG-FEM に基づく空間方向の離散化

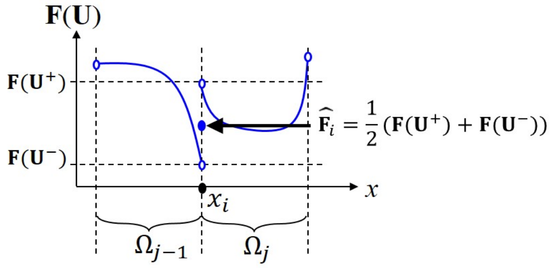
DG 法とは，要素内で独立に関数を定義でき，要素境界において局所的な flux の収支を考慮して解析を行う手法である．式 (1) に対して DG-FEM に基づく離散化を適用すると以下の弱形式が得られる．

$$\int_{\Omega_e} \mathbf{U}^* \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} d\Omega = \int_{\Omega_e} \frac{\partial \mathbf{U}^*}{\partial x} \mathbf{F}(\mathbf{U}) d\Omega - \int_{\partial \Omega_e} \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{U}) d\Omega \tag{4}$$

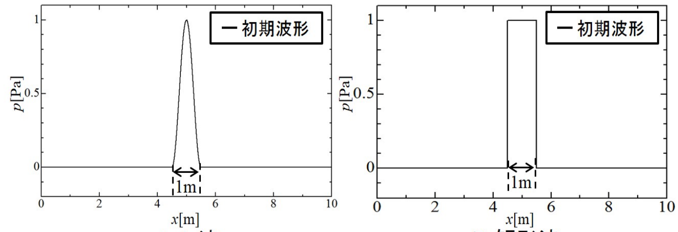
ここで，$\mathbf{U}^*$ は保存変数 $\mathbf{U}$ の重み関数である．Ω_e，$\partial\Omega_e$，$\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{U})$ は要素の領域，要素境界，要素境界上で考慮する数値 flux である．式 (4) に対して $\mathbf{U}^*$，$\mathbf{U}$ の補間近似に用いる基底関数には Legendre 多項式を，数値積分には Legendre-Gauss 法を適用すると，以下の DG 法に基づく有限要素方程式が得られる．

$$\mathbf{M}\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{S} + [\mathbf{\Phi}^+]\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{U}) - [\mathbf{\Phi}^-]\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{U}) \tag{5}$$

ここで，$\mathbf{M}$，$\mathbf{S}$ はそれぞれ質量行列，移流項の行列を，$\mathbf{\Phi}^+$，$\mathbf{\Phi}^-$ は要素境界上（1 次元では各要素の左端と右端）の基底関数 Φ の値である．関数の直交性により，$\mathbf{M}$ は対角成分のみの質量行列となり，質量行列の集中化を施すことなく陽的な時間発展の適用が可能となる． 本研究では，式 (6) を用いて数値 flux を算出する（図-1）.



図－1　数値 flux の算出図



a) sin波　b) 矩形波

図－2　初期音圧分布

$$\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{U}) = \frac{1}{2}\Big(\mathbf{F}(\mathbf{U}^+) + \mathbf{F}(\mathbf{U}^-)\Big) \tag{6}$$

(3) 時間方向の離散化

式 (5) に対して，1 次要素には 2 段階 2 次精度，2 次要素には 3 段階 3 次精度，3 次要素には 4 段階 4 次精度陽的 Runge-Kutta 法を用いる．

3. 数値解析例

本手法の妥当性と有効性を検証するため，初期波形として滑らかな sin 波と不連続な矩形波の 2 種類の 1 次元波動伝播問題を取り上げ，に波長分割数，微小時間増分量 Δt 及び要素の次数を変えた解析結果を理論解，CIP 法との比較を行う．

(1) sin 波の伝播問題

a) 解析条件

図-2a) に示すような sin 波を初期音圧分布として配置する．なお, Legendre 多項式を適用すると要素境界（節点）上に直接初期条件を与えられないため，L^2Projection を用いて初期音圧分布を配置する．粒子速度 u は全要素で 0m/s とする．

また，境界条件として，解析領域の左端と右端には完全反射境界条件を用いる．

そして，CFL 条件はそれぞれの要素次数において，解析時間 t=10.0s 内で数値振動しない範囲で出来るだけ大きくとることとする．波長分割によらず Courant 数は，DG 法の 1 次，2 次および 3 次要素においてそれぞれ 0.02，0.2,

KeyWords：　波動音響理論，有限要素法，Discontinuous Galerkin 法，騒音伝播，陽的 Runge-Kutta 法
連絡先：　〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27　TEL. 03-3817-1815

0.2 で一定とし，これをもとに Δt を決定する．DG 法の 2 次，3 次要素との比較のため，CIP 法の Courant 数は 0.2 とする．なお，c =1.0m/s，ρ =1.0kg/m^3 とする．

b)　解析結果

図-3 は t =10.0s における波長分割 8 の場合の DG 法による計算結果を理論解，CIP 法と比較した音圧分布である．DG 法の 1 次要素，及び CIP 法では音圧のピーク値が下がりアンダーシュートも顕著になるが，DG 法の 2 次，3 次要素ではその影響がみられないことが確認できる．

図-4 は t =10.0s における各手法ごとのメッシュ空間解像度と理論解との絶対対誤差の関係であり，Δx はメッシュ幅を意味する．1 次要素より 2 次要素による解析結果の方が，高い計算精度であることが確認できる．しかし，2 次要素から 3 次要素にした場合，1 次要素から 2 次要素にした場合ほどの有意性は確認できない．なお，3 次要素による計算結果の方が CIP 法よりも高い計算精度であることが確認できる．

(2)　矩形波の伝播問題

a)　解析条件

図-2b) に示すような矩形波を初期音圧分布として配置し，その他の解析条件は sin 波の伝播問題と同様である．

b)　解析結果

図-5 は t =10.0s における波長分割 20 の場合の DG 法による計算結果を理論解，CIP 法と比較した音圧分布である．1 次要素は激しい数値振動が生じており，理論解との差異が顕著であるが，DG 法の 2 次，3 次要素と CIP 法は理論解とよい一致を示している．また，3 次要素の方が CIP 法よりも矩形の波形を保っていることが確認できる．

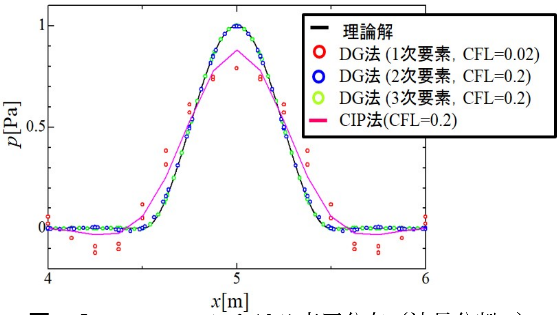
sin 波の伝播問題と同様にメッシュ空間解像度と理論解との絶対対誤差の関係を図-6 に示す．sin 波の伝播問題と同様の傾向が確認できる．

4.　おわりに

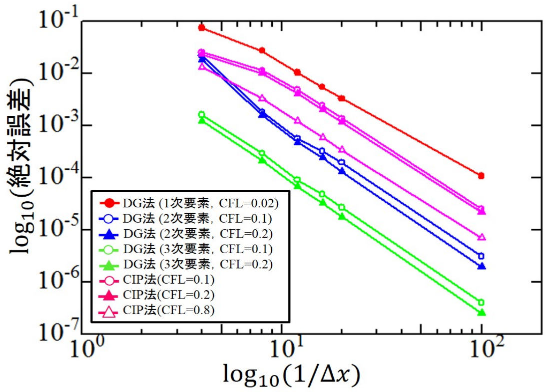
本論文では，滑らかな初期波形である sin 波と不連続な初期波形である矩形波の 2 種類を用いた 1 次元波動伝播問題を取り上げ，妥当性と有効性の検討を行い以下の結論を得た．

- DG-FEM に基づく解析結果は理論解，CIP 法とよい一致を示し，本手法の妥当性を確認した．
- メッシュ空間解像度と相対誤差の関係から，DG 法の 1 次要素より 2 次要素による解析結果の方が高い計算精度を有しており，高次要素を用いることの有効性を確認した．しかし，2 次要素から 3 次要素にした場合，1 次要素から 2 次要素にした場合ほどの有意性は確認できなかった．
- DG 法による 3 次要素計算結果は，CIP 法による計算結果よりも高い計算精度を有していることを確認した．

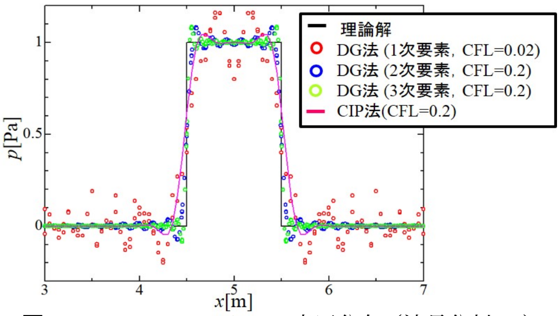
今後は不連続面でのオーバーシュート，アンダーシュートにおける対策として Limiter 手法の導入・検討を行うとともに，本手法の多次元化への拡張を行う予定である．



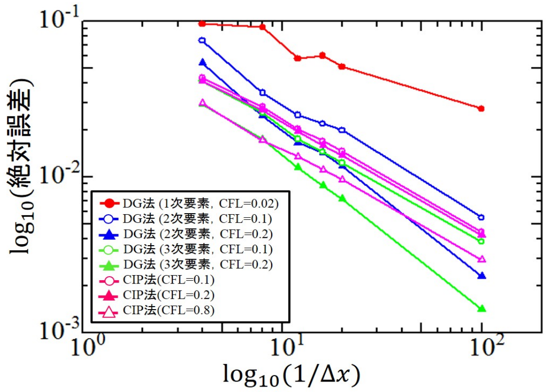
図－3　t =10.0s における音圧分布（波長分割 8）



図－4　メッシュ空間解像度と絶対誤差の関係（t =10.0s）



図－5　t =10.0s における音圧分布（波長分割 20）



図－6　メッシュ空間解像度と絶対誤差の関係（t =10.0s）

参考文献

1) M. Baccouch, A local discontinuous Galerkin method for the second-order wave equation, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 209-212, pp.129-143, 2012.

2) T. Lahivaara, T. Huttunen, A non-uniform basis order for the discontinuous Galerkin method of the 3D dissipative wave equation with perfectly matched layler, Jounal of Computational Physics, 229, pp.5144-5160, 2010.

3) 守屋陽平・谷川将規・樫山和男, AMR 法を用いた CIP 法による音場解析, 土木学会論文集 A2(応用力学), 16, pp.I_195-I_202, 2013.