

欠陥を等間隔に配置した周期層の波動透過解析

新潟大学大学院自然科学研究科 学生員 笥 拓哉
 新潟大学工学部建設学科 正会員 阿部 和久
 新潟大学大学院自然科学研究科 正会員 紅露 一寛
 新潟大学災害・復興科学研究所 正会員 Pher Errol Balde QUINAY

1. はじめに

周期構造内を伝播する波動には、入射波動が透過し得る周波数帯(パスバンド)と遮蔽される周波数帯(ストップバンド)の存在が知られている。この特性の利用例として、周期構造を層状に配置することで、特定の周波数帯における波動を遮蔽することが可能となり、現在までに様々な適用例の検討がなされている。¹⁾

また、これらの遮蔽性能を向上させるため、当研究室²⁾では周期長の異なる複合材層を積層することで、効率的に遮蔽される周波数の範囲を広げる方法を議論した。Martinez-Salaら³⁾は、三角形格子状に配置された円筒散乱体の一部を抜き取り長方形格子状の空洞部を作成し、両格子特性を利用した遮蔽効果について検討している。

この様に、等間隔に欠陥を配置した周期層を考えた時、本来の周期構造と欠陥部の両周期特性を有する遮蔽性能が期待される。しかし、従来手法では欠陥の格子サイズで規定される大きなユニットでの解析となり、計算量が膨大となる。

そこで、本研究では欠陥部での波動散乱と等価な外力を設定することにより欠陥を表現して、欠陥の無い完全な周期層1ユニットの問題に帰着して解を得る手法の構築を試みる。

2. 問題設定と解析手法

本研究では、**図1**の様に水平周期長 L_1 で与えられる層内に、等間隔 L で欠陥を配置して与えられる周期層 Ω を上下半無限均質場の間に挿入し、下半無限場 D_1 から入射角 θ で平面波 u^I が入射する問題を対象とする。ここで、 L は L_1 の整数倍 (n) で与えられ、周期構造 Ω が x_1 軸方向に区間 L 毎に無限に連続しているものとする。また、上下半無限場 D_1, D_2 と周期層の境界をそれぞれ Γ_1, Γ_2 と設定する。

さらに、欠陥を囲む様に境界 Γ_0 を設定し、 Γ_0 の外部領域において当該問題の解を得る様に、**図2**の欠陥の無い完全な周期層で Γ_0 上を加振する問題を考える。 Γ_0 上に加振力 f_s は、以下の Floquet 原理の下、 L 毎の各欠陥位置に設定した Γ_0 上に作用させる。

$$f_s(x+L) = e^{-ikL} f_s(x) \quad (1)$$

ここで、 k は入射平面波より規定される x_1 方向波数である。

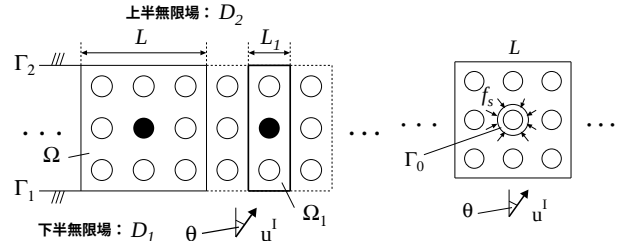


図1: 解析対象

図2: 境界 Γ_0 の設定

また、**図2**の様な欠陥の無い完全な周期層に u^I が入射した時の Γ_0 上の変位を u_0 、 Γ_0 外側内部節点力を f_0 とおく。

さらに、入射波を受けず f_s のみ作用させた時の Γ_0 上の変位を u_s 、 Γ_0 外側内部節点力を f_i とおく。 u_s, f_i は f_s で定まり、次の関係で与えられるものとする。

$$\{f_i\} = [A]\{f_s\}, \quad \{u_s\} = [B]\{f_s\} \quad (2)$$

また、**図1**の様な欠陥のある周期層において、 Γ_0 上の変位 u_a 、 Γ_0 内側内部節点力 f_a は、欠陥内部領域を表現するインピーダンス行列 $[K_a]$ を用いて次式で表現できる。

$$[K_a]\{u_a\} = \{f_a\} \quad (3)$$

これより、**図2**の問題に関して、 Γ_0 上の変位の適合条件と、力の釣り合い条件より次式を得る。

$$u_0 + u_s = u_a, \quad f_0 + f_i + f_a = 0 \quad (4)$$

これらの関係を用いて、式(2)を f_s について整理すると以下の求解方程式を得る。

$$[K_a B + A]\{f_s\} = -\{f_0 + K_a u_0\} \quad (5)$$

以上より、当該問題は $[B], [A]$ を求める問題に帰着する。

$[B], [A]$ は、 Γ_0 上の全節点を単位加振して得られる Γ_0 上の変位と外側内部節点力とを列成分に持つ行列である。本問題は、従来手法²⁾に基づき L の周期条件の下、 L_1 に関する Floquet 変換を適用して周期長 L_1 で与えられるユニットセル Ω_1 の加振問題に帰着して解くことができる。

図1において、周期長 L_1 に関する Floquet 変換 $\tilde{f}$ は次式で与えられる。

$$\tilde{f}(\tilde{x}, \kappa) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(\tilde{x}_1 + jL_1) e^{ij\kappa L_1} \quad (6)$$

ここで, $(0 \leq \tilde{x} < L_1)$, $(0 \leq \kappa < 2\pi/L_1)$ で与えられ, κ は Floquet 波数である.

また, 区間 L において式 (1) を満たすので, これを考慮すると Floquet 変換は次式で与えられる²⁾.

$$\tilde{f}(\tilde{x}, \kappa) = \frac{2\pi}{L} \delta_{\frac{2\pi}{L}}(\kappa - k) \hat{f}(\tilde{x}, \kappa) \quad (7)$$

ここで, $\hat{f}(x, \kappa) = \sum_{j=0}^{n-1} f(\tilde{x} + jL_1) e^{ij(\kappa - k)L_1}$, $\delta_{2\pi/L}(\cdot)$ は周期長 $2\pi/L$ の周期デルタ関数である.

式 (7) の逆 Floquet 変換は次式で与えられる.

$$f(\tilde{x} + mL_1) = \frac{1}{n} e^{-imkL_1} \sum_{j=0}^{n-1} \hat{f}(k + \frac{2\pi}{L}j) e^{-i\frac{2\pi}{n}mj} \quad (8)$$

これより, 当該問題は $\kappa = k + \frac{2\pi}{L}j$ ($j = 0, \dots, n-1$) で与えられる離散波数点毎の加振応答解析より解くことができる.

以上より, Floquet 変換の下, $[B], [A]$ 行列を作成し, 式 (5) より f_s を計算する.

3. 波動透過率の算出

境界 Γ_1 を通過する入射波の時間平均エネルギーを $\bar{E}_I$, Γ_2 を通過する透過波の時間平均エネルギーを $\bar{E}_T$ とする. 周期層の遮蔽性能はこれ等の比より, 透過率 $e_T = \bar{E}_I / \bar{E}_T$ として評価する.

$\bar{E}_I$, $\bar{E}_T$ は, それぞれ次式で与えられる.

$$\bar{E}_I = \frac{\omega}{2} \sum_{m=0}^{n-1} \text{Im}(\mathbf{U}_{Bm}^{I*} \cdot \mathbf{F}_{Bm}^I) \quad (9)$$

$$\bar{E}_T = \frac{\omega}{2} \sum_{m=0}^{n-1} \text{Im}(\mathbf{U}_{Tm}^{2*} \cdot \mathbf{F}_{Tm}^2) \quad (10)$$

ここで, $\mathbf{U}_{Bm}^I$, $\mathbf{F}_{Bm}^I$ は周期層 Ω 底辺である Γ_1 における入射波動の節点変位と節点力ベクトルであり, $\mathbf{U}_{Bm}^I$, $\mathbf{F}_{Bm}^I$ は Ω 上辺である Γ_2 における応答解である. また, ω は円振動数, $\text{Im}(\cdot)$ は $()$ 内の虚部, $(\cdot)^*$ は共役転置を意味している.

4. 解析例

解析例として, 母材をエポキシ樹脂, 円形介在物をアルミニウムの複合体と設定し, 欠陥部を周りの介在物と質量密度が大きく異なる鉛に置換する場合を考える. 介在物, 欠陥部の質量密度, せん断弾性係数を母材との比として, それぞれ 2.277, 16.342 と 9.6, 3.5 と設定し, 母材, 介在物, 欠陥部のポアソン比をそれぞれ 0.37, 0.345, 0.3 とした. また, $n = 3$ として $L = 3L_1$ となるように設定し, 図 4 に示すユニットセルに $\theta = 0^\circ$ の横波を入射して解析を行った.

欠陥のない完全な周期層の透過特性を知るため, それに対応する 2 次元周期場を対象に 図 3 の第 1 Brillouin Zone

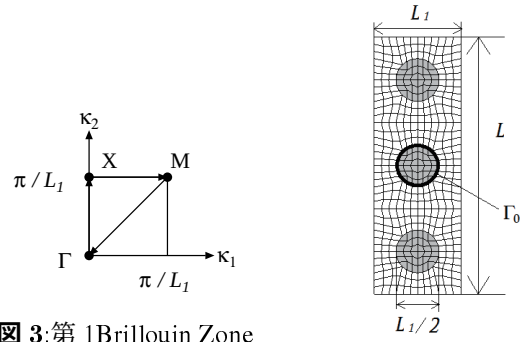


図 3: 第 1 Brillouin Zone

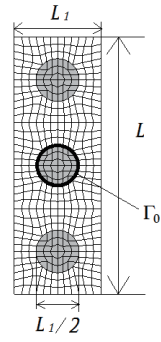


図 4: 完全な周期層
1 ユニット

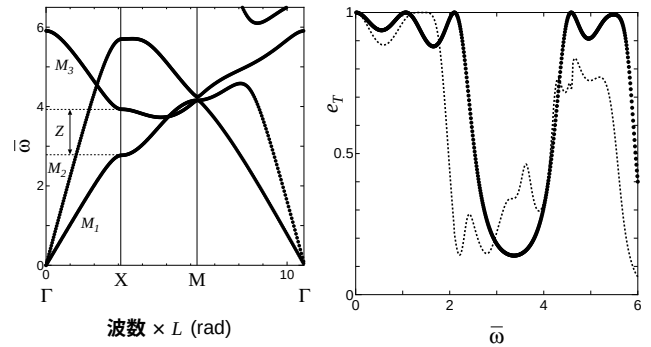


図 5: 欠陥の無い周期場の

分散曲線

図 6: 波動透過率

界に沿って分散曲線を求めたものを 図 5 に示す. ここで, $\bar{\omega} = L_1\omega/C_T$ である (C_T : 母材横波伝播速度).

図 5 より, M_1, M_3 は横波, M_2 は縦波の伝播モードに対応していることが確認でき, M_1 と M_3 の間には横波の伝播モードに対応するストップバンド Z が存在する.

欠陥のない完全な周期層 (実線) の場合と, 欠陥を有する周期層 (点線) の場合における波動透過率を 図 6 に示す. 前者において, $\bar{\omega} \geq 2.1$ から透過率が低下している. これは, Z の下端の周波数に対応しており, Z の周波数領域において波動透過が遮蔽されたものと考えられる. 一方, 後者では $\bar{\omega} \geq 1.6$ から透過率の低下が確認でき, 欠陥を導入したことにより, 遮蔽周波数域が拡大されていることが確かめられる.

5. おわりに

本研究では, 等間隔に欠陥を配置した周期層を対象に, 具体的解析手法を構築した. 等間隔に欠陥を配置することで, 効率的に遮蔽される周波数の範囲を広げられることが確認された.

参考文献

- 1) 阿部和久, 中山悠, 紅露一寛: 中間層を有する周期複合材の弾性波動解析, 応用力学論文集 Vol.13, pp1041-1048, 2010.
- 2) 阿部和久, 箕拓哉, 紅露一寛, Pher Errol Balde QUINAY: 周期層の異なる複合材層を有する無限動弾性場の波動透過解析, 応用力学論文集, Vol.18, 1859-1867, 2015.
- 3) D.Caballero, Sánchez-Dehesa: Suzuki phase in two-dimensional sonic crystals, PHYSICAL REVIEW B 64, 064303, 2001.