

# 材料表面のき裂による分調波発生現象の 2次元数値シミュレーション

○東京理科大学 正会員 丸山泰蔵  
群馬大学大学院 正会員 斎藤隆泰  
東京工業大学大学院 正会員 廣瀬壮一

## 1. はじめに

構造物の維持管理の観点から、初期段階のきずであると考えられる微小き裂を検出・計測することは重要である。しかしながら、これらのき裂は多くの場合、全体、もしくは先端部分が閉口していることが知られている。このような閉口き裂の検出・計測に対して、母材ときずの音響インピーダンス差異を用いる通常の線形超音波法の適用は難しい。それは、閉口き裂が入射超音波の大部分を透過させてしまうためである。以上のような理由から、閉口き裂の検出・計測に対して、接触音響非線形性(CAN: Contact Acoustic Nonlinearity)<sup>1)</sup>による非線形超音波発生現象をベースとした非線形超音波法が有効な検査手法となることが期待されている。

非線形超音波法では、きずの非線形性によって受信波に含まれる高調波・分調波を周波数解析により抽出し、きずの位置推定や深さ計測を行う。ここで、高調波、及び分調波はそれぞれ入射波の中心周波数の整数倍、及び整数分の一の周波数成分を有する波である。高調波の発生メカニズムは、30年以上前にその現象が提唱されてから<sup>2)</sup>、き裂面での繰り返し打撃やせん断応力の変化による説明がなされ、概ね明らかにされたと考えられる<sup>3)</sup>。しかしながら、分調波に関しては、その発生は確認されているものの<sup>1,4)</sup>、発生メカニズムは未だほとんど解明されておらず、さらなる理論的なアプローチが必要である。そのため、本研究では分調波発生現象に着目し、数値シミュレーションを実行する。

CANによる分調波発生現象の数値シミュレーションは先行研究として、差分法<sup>5)</sup>、有限要素法<sup>6)</sup>による報告例があるが、これらの数値シミュレーションでは非常に薄い剥離部分が接触を有する場合に限定されている。一方、著者らは、無限領域中の曲線き裂、及び閉口配置された二つのき裂に対する2次元数値シミュレーションを実行し、分調波発生現象を再現した<sup>7)</sup>。しかしながら、対象とした形状・配置のき裂が実際に存在するかどうかといった問題は考慮していない。そのため、本研究では、計測実験によって分調波発生現象が確認されている材料表面のき裂<sup>4)</sup>に対して数値シミュレーションを実行し、その非線形振動現象について考察する。

非線形解析には、き裂のモデル化、及びき裂面での境界条

件の取り扱いが精度良く容易に行える時間領域境界要素法を用いる。また、分調波が発生したことを明確に判断できるように比較的長時間の解析を行う。数値解析を安定かつ高精度に行うため、陰的 Runge-Kutta 法を用いた演算子積分法(CQM)を時間方向、Galerkin 法を空間方向の離散化に用いる。き裂面の接触モデルには、文献<sup>7)</sup>と同様のものを用いる。

## 2. 解くべき問題及び境界積分方程式

図1に示すように、自由表面  $S_s$  を有する半無限領域  $D$  中にき裂面  $S(= S^+ \cup S^-)$  を有する表面き裂が存在するモデルを考える。ここで、上付き添字の  $\pm$  は向かい合うそれぞれのき裂面を表している。領域  $D$  は線形、均質な等方性弾性体であると仮定し、き裂面での表面力の連続性を考慮すると、変位  $\mathbf{u}$  が満足する支配方程式、及び境界・初期条件は次のように与えられる。

$$c_T^2 \nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + (c_L^2 - c_T^2) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x} \in D \quad (1)$$

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0} \quad \mathbf{x} \in S_s \quad (2)$$

$$\mathbf{t}^+(\mathbf{x}, t) + \mathbf{t}^-(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0} \quad \mathbf{x} \in S \quad (3)$$

$$[\mathbf{u}](\mathbf{x}, t) (\equiv \mathbf{u}^+(\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}^-(\mathbf{x}, t)) = \mathbf{0} \quad \mathbf{x} \in \partial S \quad (4)$$

$$\mathbf{u}^{\text{sc}}(\mathbf{x}, 0) = \dot{\mathbf{u}}^{\text{sc}}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0} \quad \mathbf{x} \in D \quad (5)$$

ここで、上付き添字の sc は散乱波を表しており、自由場  $\mathbf{u}^{\text{free}}$  のき裂による乱れとして定義しており、 $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{\text{free}} + \mathbf{u}^{\text{sc}}$  である。また、 $\mathbf{u}^{\text{free}}$  はき裂が存在しない場合の解であり、入射波  $\mathbf{u}^{\text{in}}$ 、及び自由表面による反射波  $\mathbf{u}^{\text{ref}}$  によって、 $\mathbf{u}^{\text{free}} = \mathbf{u}^{\text{in}} + \mathbf{u}^{\text{ref}}$  と表される。 $\mathbf{t}$  は表面力であり、上付き添字の  $\pm$  は対応する法線方向ベクトル  $\mathbf{n}^\pm$  を表している。 $[\mathbf{u}]$  はき裂開口変位である。また、 $c_L, c_T$  は P 波、S 波の波速であり、 $(\cdot)$  は時間微分である。式(4)はき裂の縁  $\partial S$  において、開口変位がゼロであることを表しており、式(5)は静止過去の条件

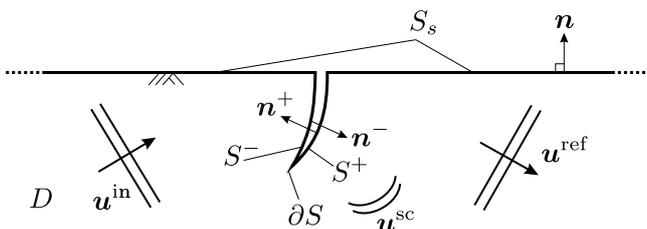


図1 半無限弾性体中の表面き裂による波動散乱問題

**Key Words:** 非線形超音波法, 接触音響非線形性, 分調波, 時間領域境界要素法  
〒278-8510 千葉県野田市山崎 2641 · TEL: 04-7124-1501 (4073)

である。

境界条件 (2), (3), 初期条件 (5), Sommerfeld の放射条件を考慮すると, 支配方程式 (1) から  $D$  における  $\mathbf{u}$  の積分表現が導出される. その後, 観測点を領域  $D$  内から境界  $S, S_s$  上に極限移行し, 重み関数  $\psi$  を用い Galerkin 法によって評価することを考えると, 次の式を解くこととなる<sup>8)</sup>.

$$\begin{aligned} \int_{S^+} \psi(\mathbf{x}) \mathbf{t}^+(\mathbf{x}, t) dS_x &= \int_{S^+} \psi(\mathbf{x}) \mathbf{t}^{\text{free};+}(\mathbf{x}, t) dS_x \\ &- \int_0^t \int_{S_s \cup S^+} \psi(\mathbf{x}) \\ &\quad \times \text{p.f.} \int_{S_s} \mathbf{W}^+(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) \cdot \mathbf{u}^{\text{sc}}(\mathbf{y}, \tau) dS_y dS_x d\tau \\ &- \int_0^t \int_{S_s \cup S^+} \psi(\mathbf{x}) \\ &\quad \times \text{p.f.} \int_{S^+} \mathbf{W}^+(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) \cdot [\mathbf{u}](\mathbf{y}, \tau) dS_y dS_x d\tau \end{aligned} \quad (6)$$

ここで,  $\mathbf{W}$  は超特異積分核,  $\mathbf{t}^{\text{free}}$  は自由場の表面力であり, p.f. は発散積分の有限部分を表している.

式 (6) を離散化し, 適切な境界条件によって連立一次方程式を構成し, 数値的に解く. しかしながら, 本稿では紙面の都合上, それらを省略する.

### 3. 数値解析例

本稿では, 分調波発生現象が確認できた場合の一例として, 図 2 に示すように, 自由表面に対して  $45^\circ$  の角度を有する長さ  $a$  の表面き裂に対して平面波を入射したときの解析結果を示す. このとき, 入射角は  $75^\circ$  とし, 中心周波数  $f^{\text{in}}$ , 振幅  $u_0$ , 15 周期の正弦バースト波形を有する平面 P 波を用いた. 材料定数は, ポアソン比 0.3, 静止摩擦係数 0.74, 動摩擦係数 0.47 とした.

本研究では, 遠方における後方散乱 P 波を受信波として評価する. 遠方近似された散乱 P 波  $u_L^{\text{far}}$  は遠方散乱振幅  $\Omega_L$  を用いて次のように表される.

$$u_L^{\text{far}}(\mathbf{x}, t) \simeq \frac{1}{\sqrt{8\pi x}} \Omega_L \left( \hat{\mathbf{x}}, t - \frac{x}{c_L} \right) \quad (7)$$

このとき,  $x = |\mathbf{x}|$ ,  $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}/x$  と定義している. 計算パラメータは入射波の中心波数  $k_T (= 2\pi f^{\text{in}}/c_T)$ , き裂の初期開口変位  $u_g$  を与えるものとし, 本稿の解析例ではそれぞれ  $k_T a = 3.5$ ,  $u_g/u_0 = 0.0$  とした.

$\Omega_L$  の時刻歴波形, 及び最大値で正規化されたフーリエスペクトルを図 3 に示す. 図 3(a) より, 大小の振幅を交互に繰り返す典型的な分調波が含まれる波形になり, 安定している様子がわかる. また, 図 3(b) 中の  $A_{\frac{1}{2}\omega}/A_\omega$  は分調波と基本周波数に対応するフーリエ振幅の比を表しており,  $A_{\frac{1}{2}\omega}/A_\omega$  の明確なピークが確認できる. 以上より, 接触条件を考慮した材料表面のき裂による弾性波の散乱問題では, 特定の条件下において分調波発生現象が起こることがわかる.

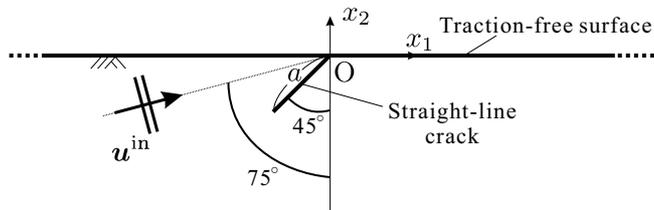


図 2 数値解析モデル

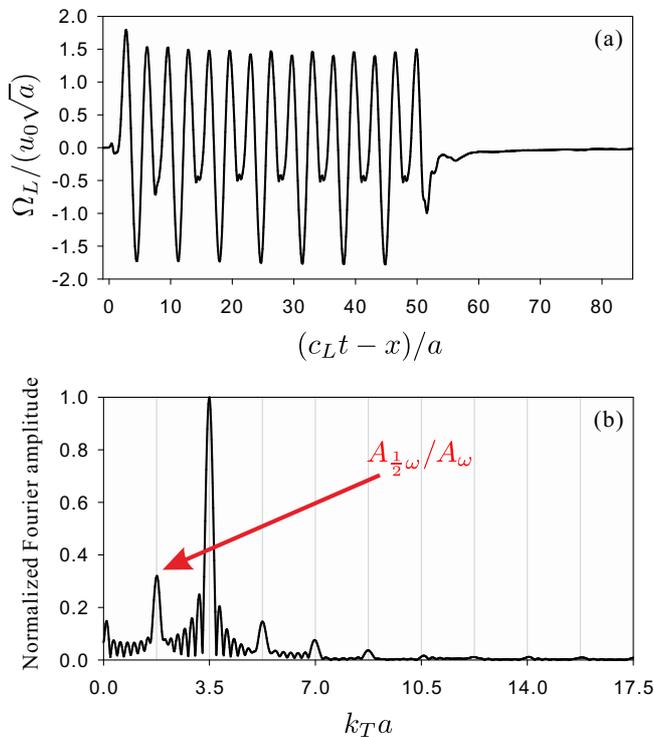


図 3  $k_T a = 3.5$ ,  $u_g/u_0 = 0.0$  のときの (a) 後方散乱 P 波に対する遠方散乱振幅, (b) 正規化されたフーリエスペクトル

### 4. おわりに

本稿では, 材料表面のき裂による散乱問題に対する境界積分方程式, 及び解析例の一部を示した. き裂の角度や入射角を変化させた場合の解析結果, 及びそれらの考察については当日報告する.

#### 参考文献

- 1) I. Yu. Solodov, N. Krohn, and G. Busse: CAN: an example of nonclassical acoustic nonlinearity in solids, *Ultrasonics*, Vol.40, pp.621–625, 2002.
- 2) O. Buck, W. L. Morris, and J. M. Richardson: Acoustic harmonic generation at unbonded interfaces and fatigue cracks, *Appl. Phys. Lett.*, Vol.33, No.5, pp.371–373, 1978.
- 3) I. Yu. Solodov, D. Doring, and G. Busse: New opportunities for NDT using non-linear interaction of elastic waves with defects, *J. Mech. Eng.*, Vol.57, No.3, pp.169–182, 2011.
- 4) K. Yamanaka, T. Mihara, T. and Tsuji: Evaluation of closed cracks by model analysis of subharmonic ultrasound, *Jpn. J. Appl. Phys.*, Vol.43, pp.3082–3087, 2004.
- 5) B. Sarens, B. Verstraeten, C. Glorieux, G. Kalogiannakis, and D. V. Hemelrijck: Investigation of contact acoustic nonlinearity in delaminations by shearographic imaging, laser doppler vibrometric scanning and finite difference modeling, *IEEE Trans. Ultrason. Ferr.*, Vol.57, No.6, pp.1383–1395, 2010.
- 6) S. Delrue and K. V. D. Abeele: Three-dimensional finite element simulation of closed delaminations in composite materials, *Ultrasonics*, Vol.52, pp.315–324, 2012.
- 7) 丸山泰蔵・斎藤隆泰・廣瀬壮一: 接触条件を考慮したき裂による 2 次元分調波励起シミュレーション, 土木学会論文集 A2(応用力学), Vol.71, No.2, pp.I.299–I.310, 2015.
- 8) 小林昭一編著: 波動解析と境界要素法, 京都大学学術出版会, 2000.