

2次元波動伝搬問題に対する演算子積分時間領域 アイソジオメトリック境界要素法

群馬大学 大学院理工学府
群馬大学 理工学部環境創理工学科
群馬大学 大学院理工学府

学生会員 ○市川 諒
非会員 吉原 央
正会員 斎藤隆泰

1. はじめに

近年, CAD の形状関数である NURBS(Non-Uniform Rational B-Spline) を有限要素解析に適用したアイソジオメトリック解析 (IGA) が注目を集めている. アイソジオメトリック解析は Hughes ら¹⁾ が提案した解析手法で, 有限要素法における空間形状を NURBS で補間することで, 形状を厳密に保持したまま解析ができる利点を持つ. 本研究では, この IGA を演算子積分時間領域境界要素法に適用した演算子積分時間領域アイソジオメトリック境界要素法 (CQ-IGBEM) を開発する. 以下では, 2次元波動伝搬問題に対する定式化の概要を説明した後, 数値解析例を示すことで, 提案手法の妥当性・有効性を検討する.

2. 解くべき問題

図1のような無限領域 Ω における, 入射波 u^{in} による散乱体の境界 Γ による散乱問題について考える. 以下では, 面外波動問題を対象とするため, 直交座標系 (x_1, x_2) を用い, 時刻 t , 位置 $\mathbf{x}$ における面外変位を単に $u(\mathbf{x}, t)$ と表記する. 面外変位 $u(\mathbf{x}, t)$ は次の波動方程式を満足する.

$$\mu u_{,kk} - \rho \ddot{u} = 0 \quad (1)$$

ここで, μ はせん断弾性定数, ρ は密度, $(\cdot)$ は時間に関する微分, $(\cdot)_{,i}$ は空間微分であり $\partial/\partial x_i$ を表す. 式 (1) を無限領域 Ω で満足する面外変位 $u(\mathbf{x}, t)$ を CQ-IGBEM で求めることが, 本解析の目的となる. 一方, 境界 Γ に対する時間領域境界積分方程式は次のように書ける.

$$C(\mathbf{x})u(\mathbf{x}, t) = u^{\text{in}}(\mathbf{x}, t) + \int_{\Gamma} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * q(\mathbf{y}, t) d\Gamma_y - \int_{\Gamma} S(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * u(\mathbf{y}, t) d\Gamma_y \quad (2)$$

ここで, $C(\mathbf{x})$ は自由項²⁾, $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$, $S(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ はそれぞれ面外波動問題における時間領域基本解および対応する二重層核である. また, $*$ は畳込み積分, q は表面力を表す.

3. 演算子積分法を用いた時間方向の離散化

従来の時間領域境界要素法では, 式 (2) の計算は, 時間増分が小さい場合に不安定になる. そこで, 式 (2) の畳込み積分の離散化に, Lubich が提案した演算子積分法 (CQM: Convolution Quadrature Method)³⁾ を適用する. なお, 演算子積分法の詳細については文献³⁾等を参照されたい.

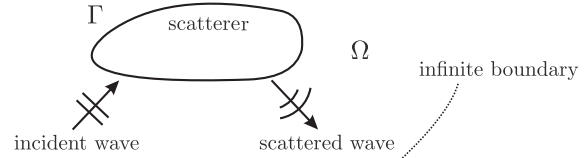


図1 解くべき問題

4. NURBS 基底関数を用いた空間方向の離散化

NURBS 基底関数は, 次数, ノットベクトル, 重みによって定義される. ノットベクトルは局所座標系で定義されるノットの非減少列, 重みは制御点にかかるパラメータを表し, 制御点は直交座標系で定義される位置ベクトルである. NURBS 基底関数 $R_j^p(\xi)$ は次式で与えられる.

$$R_j^p(\xi) = \frac{N_j^p(\xi) w_j}{\sum_{j=1}^n N_j^p(\xi) w_j} \quad (3)$$

ここで, p は曲線の次数, n は制御点の数, ξ はノット, w_j は制御点での重み, $N_j^p(\xi)$ は B-Spline 基底関数¹⁾である. まず境界上において, 空間方向を NURBS 基底関数 $\phi_d^i(\xi)$ (ただし, $\phi_d^i(\xi) \equiv R_j^p(\xi)$, $j = (i, d)^4$) を導入して離散化すると, 境界値 $u(\mathbf{x}, t)$, $q(\mathbf{x}, t)$ はそれぞれ

$$u(\mathbf{x}, t) = \sum_i \sum_{d=1}^{p+1} \phi_d^i(\xi) u_d^i(t),$$

$$q(\mathbf{x}, t) = \mu \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x}, t) = \sum_i \sum_{d=1}^{p+1} \phi_d^i(\xi) q_d^i(t) \quad (4)$$

で表せる. 式 (2) を時間に関して演算子積分法で離散化し, 空間に関して式 (4) を適用すると, 時間増分を Δt として以下の離散化された境界積分方程式を得る.

$$C(\mathbf{x})u(\mathbf{x}, n\Delta t) = u^{\text{in}}(\mathbf{x}, n\Delta t) + \sum_{k=1}^n \sum_i \sum_{d=1}^{p+1} \left[A_d^{i,n-k}(\xi) q_d^i(k\Delta t) - B_d^{i,n-k}(\xi) u_d^i(k\Delta t) \right] \quad (5)$$

ここに, 影響関数 $A_d^{i,m}(\xi)$, $B_d^{i,m}(\xi)$ は次式で与えられる.

$$A_d^{i,m}(\xi) = \frac{\mathcal{R}^{-m}}{L} \sum_{l=1}^{L-1} \hat{A}_d^{i,l}(\xi) \exp\left(-2\pi i \frac{ml}{L}\right) \quad (6)$$

$$B_d^{i,m}(\xi) = \frac{\mathcal{R}^{-m}}{L} \sum_{l=1}^{L-1} \hat{B}_d^{i,l}(\xi) \exp\left(-2\pi i \frac{ml}{L}\right) \quad (7)$$

ただし, $\mathcal{R}, L$ は演算子積分法のパラメータ³⁾, $\hat{A}_d^{i,l}$, $\hat{B}_d^{i,l}$ は

$$\hat{A}_d^{i,l}(\xi) = \int_{\xi_i} \hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\xi), s_l) \phi_d^i(\xi) J(\xi) d\xi \quad (8)$$

Key Words: アイソジオメトリック解析, 境界要素法, 演算子積分法, 時間領域, 波動問題

〒 376-8515 群馬県桐生市天神町 1-5-1 群馬大学 大学院理工学府 TEL. 0277-30-1610 FAX. 0277-30-1601

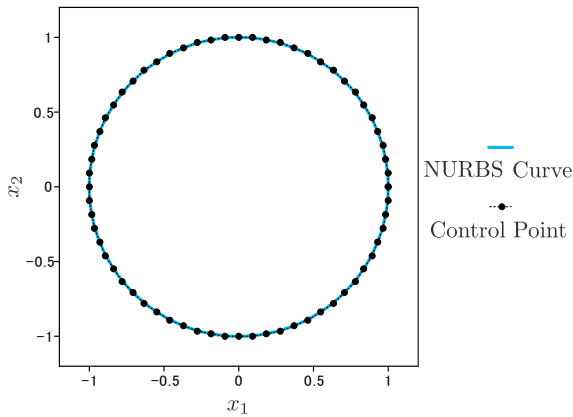


図2 円形空洞 (32 要素) と制御点 (65 点)

$$\hat{B}_d^{i,l}(\xi) = \int_{\xi_i} \hat{S}(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\xi), s_l) \phi_d^i(\xi) J(\xi) d\xi \quad (9)$$

で定義される. ここで $\hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s_l)$, $\hat{S}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s_l)$ はそれぞれ $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$, $S(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ の Laplace 変換, $J(\xi)$ は NURBS 基底関数を導入した際に現れるヤコビアンである. IGA で離散化した要素を IG 要素とし, 境界 Γ を M 個の IG 要素で離散化すれば, 第 n ステップにおいて次の方程式を得る.

$$\sum_{i=1}^M \sum_{d=1}^{p+1} \left\{ \left[\frac{\phi_d^i(\xi)}{2} + B_d^{i,0}(\xi) \right] u_d^{i,n} - A_d^{i,0}(\xi) q_d^{i,n} \right\} = u^{\text{in}}(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^M \sum_{d=1}^{p+1} \left[A_d^{i,n-k}(\xi) q_d^{i,k} - B_d^{i,n-k}(\xi) u_d^{i,k} \right] \quad (10)$$

以上より, 離散化された時間領域境界積分方程式が示せた.

5. 数値解析例

提案手法による数値解析例を示す. 今, 原点中心, 半径 a の円形空洞に対する散乱問題を考える. ここで, 入射波は平面波とし, 次式で与えた.

$$u^{\text{in}}(\mathbf{x}, t) = \frac{u_0}{2}(1 - \cos 2\pi\alpha) \quad (11)$$

$$\alpha = \begin{cases} \frac{c}{\lambda} \left(t - \frac{x_1 + a}{c} \right) & \text{for } (0 \leq \alpha \leq 1) \\ 0 & \text{for otherwise} \end{cases} \quad (12)$$

ただし, c は波速, u_0 は振幅, λ は波長である. 解析では, 入射波の振幅 u_0 を $u_0 = 1.0$, 領域 Ω における波速 c , 密度 ρ をそれぞれ $c = 1.0$, $\rho = 1.0$ とし, 入射波の波長 λ を $\lambda = 2.0$, 円形空洞の半径 a を $a = 1.0$ とした. また円形空洞は CAD で作成し, 1 波長に対して十分な要素節点を配置できるように, ノットの挿入等を行い, ノットベクトル, 制御点などを出力した. このとき形状は図2のようになり, 次数 p は $p = 2$, 要素数 M は $M = 32$, 全制御点数 n は $n = 65$ となる. また, 総時間ステップ数 N は $N = 1024$, 時間増分 $\Delta t = 0.01$ とした. 図3は $(x_1, x_2) = (-2a, 0), (-3a, 0), (-4a, 0)$ での全変位を示している. 比較のため, Pao と Mow による解析解も実線で示してある. 図3より, CQ-IGBEM による解析結果は, 解析解と一致しており, 提案手法が妥当であると言える. 一方, 図4(a)-(d)はそれぞれ $t = 2.0, 4.0, 6.0, 8.0$ における空

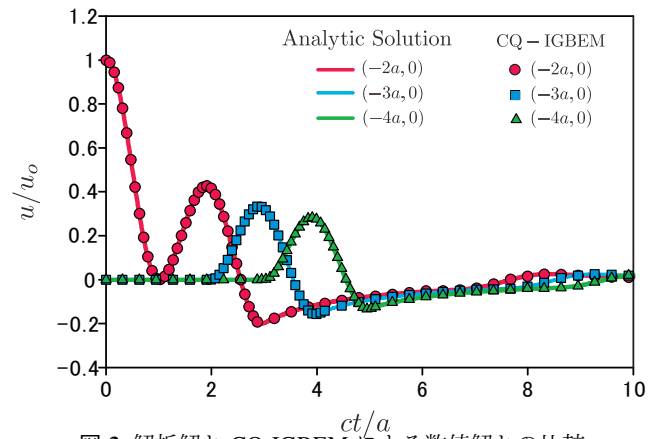
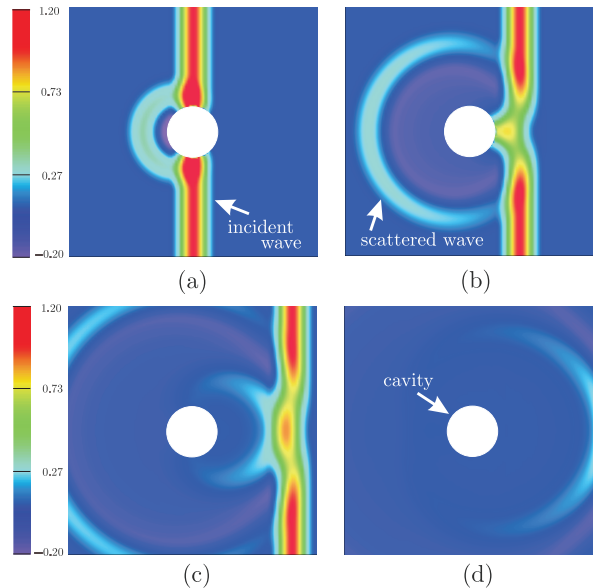


図3 解析解と CQ-IGBEM による数値解との比較

図4 空洞周辺の面外方向変位場 (a) $t = 2.0$ (b) $t = 4.0$ (c) $t = 6.0$ (d) $t = 8.0$

洞周辺の面外方向変位場を示している. 図4(a)では, 入射波が円形空洞に到達し, 図4(b), (c)で散乱波が伝搬している様子を確認できる. また, 図4(d)より, 入射波が円形空洞により散乱され, 同心円状に広がり, 時間ステップが進むごとに振幅が減衰していることが見て取れ, 妥当な結果が得られていると言える.

6. 結論

波動問題に対する演算子積分時間領域アイソジオメトリック境界要素法の定式化を行った. 簡単な数値解析を行い, 結果の妥当性を確認した. 今後は, より複雑なモデルの解析や, 3次元問題への拡張を行う予定である.

参考文献

- 1) J.A.Cottrell, T.J.R.Hughes, Y.Bazilevs, Isogeometric Analysis: Toward Integration of CAD and FEA, John Wiley and Sons, (2009).
- 2) 小林昭一編著: 波動解析と境界要素法, 京都大学学術出版会, (2000).
- 3) Lubich, C.: Convolution quadrature and discretized operational calculus I and II, *Numer. Math* 52, pp.129-145 and pp.413-425, (1988).
- 4) Simpson, R.N., Boradas, S.P.A., Rabczuk, T.: A two dimensional isogeometric boundary element method for elastostatic analysis. *Comput Methods Appl. Mech. Engrg.* 209-212, pp.87-100, (2012).