NURBS による３次元物体形状作成の試み

日本大学大学院　学生会員　○齋藤　良平
日本大学　フェロー　野村　卓史
日本大学　正会員　長谷部　寛

１．はじめに

風災害や火山災害では瓦，木片，噴石などの飛翔物による被害がある．これらの物体形状は複雑で不規則である．これらの物体の挙動を解析するためには多様な物体形状の解析モデルが必要である．有限要素法は解析対象の形状作成の任意性においてきわめて優れた手法であるが，メッシュ生成に多くの労力がかかること，また CAD で作成された曲面形状を厳密に表現しきれないことが弱点として挙げられる．そこで CAD で用いられる NURBS（Non-Uniform Rational B-spline）を有限要素の基底関数に用いた IGA（Isogeometric Analysis）という解析手法が提案されている [1]．

本研究では CAD ソフトから物体の形状データを抽出し，NURBS を用いて物体形状を作成し，物体の運動解析に必要な諸量を算出することを目的とするもの [2,3] で，３次元物体の扱いについて報告する．

２．NURBS による曲面の表現

曲面の表現に用いる NURBS 基底関数は次式(1)のように，2つのパラメータξ,ηの関数として定義される．

$$R_{i,j}^{p,q}(\xi,\eta)=\frac{N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta)w_{ij}}{\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}N_{k,p}(\xi)M_{l,q}(\eta)w_{kl}} \qquad (1)$$

ここで w_{ij} は重み，$N_{i,p}$，$M_{j,q}$ は B-spline 基底関数，p,q は基底関数の次数，n，m は基底関数の数，i はノットベクトル $\Xi=\{\xi_1,\cdot,\xi_i,\cdot,\xi_{n+p+1}\}$ の成分の番号，j はノットベクトル $\mathcal{H}=\{\eta_1,\cdot,\eta_j,\cdot,\eta_{m+q+1}\}$ の成分番号である．

B-spline 基底関数 $N_{i,p}$ は以下のように逐次的過程により定義される．

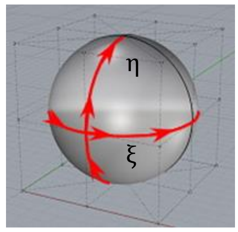
次数 p=0 のとき

$$N_{i,p}(\xi)=\begin{cases}1, & if\ \xi_i\le\xi<\xi_{i+1}\\ 0, & otherwise\end{cases} \qquad (2)$$

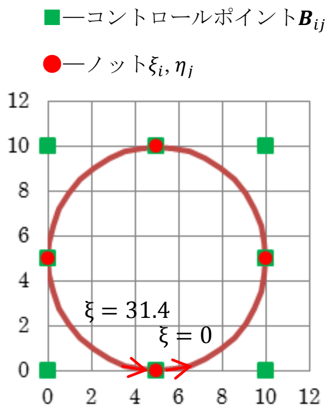
次数 p>0 のとき

$$N_{i,p}(\xi)=\frac{\xi-\xi_i}{\xi_{i+p}+\xi_i}N_{i,p-1}(\xi)+\frac{\xi_{i+p+1}-\xi}{\xi_{i+p+1}-\xi_{i+1}}N_{i+1,p-1} \qquad (3)$$

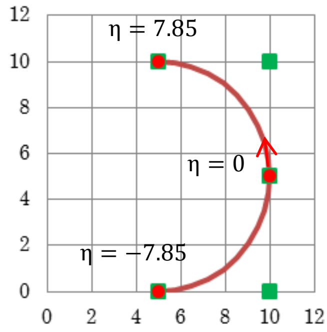
ノットベクトル Ξ はノット ξ_i の値が同じ，もしくは大きくなるように並べなければならない．NURBS 曲面は NURBS 基底関数とコントロールポイントの線形結合により式(4)のように表わされる．



(a)　球とパラメータ ξ,η



(b)　$\eta=0$ の曲線（x,y 面内）



(c)　$\xi=0$ の曲線（x,z 面内）

B_{ij}			w_{ij}
x	y	z	
5	0	5	1
10	0	5	1/2
10	5	5	1
10	10	5	1/2
5	10	5	1
0	10	5	1/2
0	5	5	1
0	0	5	1/2
5	0	5	1

B_{ij}			w_{ij}
x	y	z	
5	5	0	1
10	5	0	$1/\sqrt{2}$
10	5	5	1
10	5	10	$1/\sqrt{2}$
5	5	10	1

$$\Xi=\begin{Bmatrix}\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4,\xi_5,\xi_6,\\ \xi_7,\xi_8,\xi_9,\xi_{10},\xi_{11},\xi_{12}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0,\ 0,0,7.85,7.85,15.7,15.7,\\ 23.5,23.5,31.4,31.4,31.4\end{Bmatrix}$$

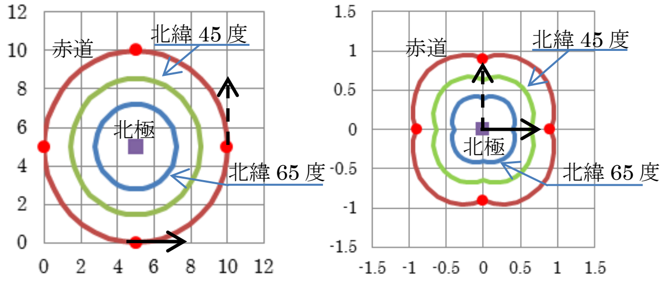
$$\mathcal{H}=\begin{Bmatrix}\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4,\\ \eta_5,\eta_6,\eta_7,\eta_8\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-7.85,-7.85,-7.85,\\ 0,0,7.85,7.85,7.85\end{Bmatrix}$$

図１NURBS で表した球面形状と用いた諸数値

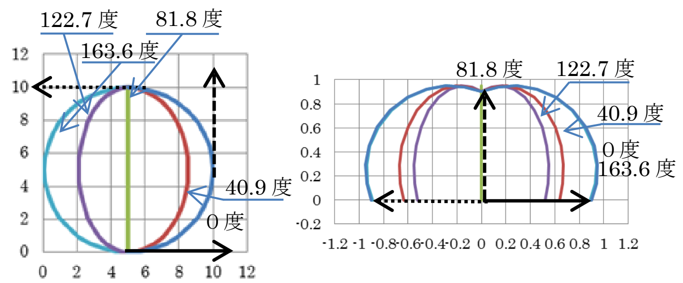
$$\mathbf{S}(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}R_{i,j}^{p,q}(\xi,\eta)\boldsymbol{B}_{ij} \qquad (4)$$

$\mathbf{S}=\langle x(\xi,\eta),y(\xi,\eta),z(\xi,\eta)\rangle^{\mathrm{T}}$ は NURBS 曲面，$\boldsymbol{B}_{ij}=\langle x_{ij},y_{ij}z_{ij}\rangle^{\mathrm{T}}$ はコントロールポイントである．図１に NURBS 曲面を用いて作成した球と用いた数値を示す．これらの数値は CAD ソフト Rhinoceros から抽出した．

キーワード　Isogeometric Analysis, NURBS，B-spline，運動解析，ガウスの発散定理，３次元物体
連絡先〒101-8308　東京都千代田区神田駿河台１丁目 8-14　日本大学大学院理工学研究科土木工学専攻　TEL03-3259-0411



(a) 各緯度ごとの球の形状と導関数のホドグラフ（η 一定）



(b) 各経度ごとの球の形状と導関数のホドグラフ（ξ 一定）

図２　球の導関数のホドグラフ

３．体積, 重心, 慣性モーメントの算出

運動解析に必要な体積V, 重心(x_G, y_G, z_G), 慣性モーメント$I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}, I_{xy}, I_{xz}, I_{yz}$をガウスの発散定理[式(5)]により算出する.

$$\iiint_\Omega \nabla \cdot F\, d\Omega = \iint_\Gamma F \cdot \boldsymbol{n}\, d\Gamma \qquad (5)$$

ここでΩは物体が占める領域, Γは物体の表面, $\boldsymbol{n} = \langle n_x, n_y, n_z \rangle^{\mathrm{T}}$ は表面Γ上の外向き単位法線ベクトルである.体積Vの場合,被積分関数を以下のように与える.

$$F_x = \frac{1}{3}x,\ F_y = \frac{1}{3}y,\ F_z = \frac{1}{3}z \quad \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 1\right) \qquad (6)$$

その結果体積Vは次の表面積分で表される.

$$V = \int_{\eta_0}^{\eta_L}\int_{\xi_0}^{\xi_L}\left\{\frac{1}{3}x(\xi,\eta)n_x + \frac{1}{3}y(\xi,\eta)n_y + \frac{1}{3}z(\xi,\eta)n_z\right\}d\xi d\eta \qquad (7)$$

ここで方向余弦n_x, n_y, n_zは次式で表される.

$$n_x = \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} \quad n_y = \frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial z}{\partial \eta}$$
$$n_z = \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta} \qquad (8)$$

重心を求めるために１次モーメントを算出する. zx面からの距離yを積分する１次モーメントG_{zx}は次のように表される.

$$G_{zx} = \iiint_\Omega y\, dxdydz \qquad (9)$$

被積分関数は次のように与えた.

$$F_y = \frac{1}{2}y^2 \ \left(\frac{\partial F_y}{\partial y} = y\right) \qquad (10)$$

その結果１次モーメントは次の表面積分で表される.

$$G_{zx} = \int_{\eta_0}^{\eta_L}\int_{\xi_0}^{\xi_L}\left\{\frac{1}{2}y^2(\xi,\eta)n_y\right\}d\xi d\eta \qquad (11)$$

z軸まわりの慣性モーメントI_{zz}は次のように表される.

$$I_{zz} = \iiint_\Omega (x^2 + y^2)dxdydz \qquad (12)$$

被積分関数を次のように与えた.

$$F_x = \frac{1}{3}x^3,\ F_y = \frac{1}{3}y^3 \ \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} = x^2 + y^2\right) \qquad (13)$$

その結果慣性モーメントI_{zz}は次の表面積分で表される.

$$I_{zz} = \int_{\eta_0}^{\eta_L}\int_{\xi_0}^{\xi_L}\left\{\frac{1}{3}x^3(\xi,\eta)n_x + \frac{1}{3}y^3(\xi,\eta)n_y\right\}d\xi d\eta \qquad (14)$$

慣性乗積I_{xy}は次のように表される.

$$I_{xy} = \iiint xy\, dxdydz \qquad (15)$$

被積分関数は次のように与えた.

$$F_x = \frac{1}{4}x^2y,\ F_y = \frac{1}{3}xy^2 \ \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = xy\right) \qquad (16)$$

その結果慣性乗積I_{xy}は次の表面積分で表される.

$$I_{xy} = \int_{\eta_0}^{\eta_L}\int_{\xi_0}^{\xi_L}\left\{\frac{1}{4}x^2y(\xi,\eta)n_x + \frac{1}{4}xy^2(\xi,\eta)n_y\right\}d\xi d\eta \qquad (17)$$

式(7),(11),(14),(17)には,NURBS 曲面の導関数$\frac{\partial S}{\partial \xi}, \frac{\partial S}{\partial \eta}$が必要である．球面の導関数のホドグラフを図２に示す. 図２(a)は赤道から北極までの形状を示した. 図２(b)は経度０度から163度までの形状を示した. 台形側を適用し,数値積分した結果を表１に示す.

表１　体積，重心，慣性モーメントの計算結果

	計算値	理論値	誤差 (%)
V	518.21	523.58	-1.02
$x_G(G_{yz}/V)$	5.03	5	0.63
$y_G(G_{zx}/V)$	5.04	5	0.73
$z_G(G_{xy}/V)$	4.96	5	-0.80
I_{xx}	5228.8	5236.0	-0.135
I_{yy}	5306.3	5236.0	1.34
I_{zz}	5297.7	5236.0	1.18
I_{xy}	8.88	0	
I_{xz}	-0.033	0	
I_{yz}	-0.33	0	

４．まとめ

NURBS を用いて作成した物体形状に対し,ガウスの発散定理を用いて３次元物体の体積，重心，慣性モーメントを算出した.物体形状の例として球を作成した.体積，重心，慣性モーメントの計算は慣性乗積の計算値の誤差が大きいため今後改善する必要がある.今後はさまざまな３次元物体形状の作成と運動解析を行う.

５．参考文献

1) J. A. Cottrell, T. J.R. Hughes, Y. Bazilevs : Isogeometric Analysis Toward Integration of CAD and FEA, WILEY, 2009.

2) 齋藤良平,野村卓史,長谷部寛 : NURBS による物体形状作成と運動解析,平成 27 年度土木学会全国大会第 70 回年次学術講演会,CS8-008,2015.

3) 齋藤良平,野村卓史,長谷部寛 : NURBS による物体形状作成の試み,平成 27 年度土木学会第 43 回関東支部技術研究発表会,I-55,2016.