

せん断抵抗特性の違いからみた弾性に用いる応力速度の選択

東北大学大学院工学研究科 ○ 学生会員 藤本真明
 東北大学大学院工学研究科 正会員 岩熊哲夫
 東北大学大学院工学研究科 正会員 齊木 功

1. まえがき

Cauchy 応力の Jaumann 速度が弾性によく用いられるが、大きなせん断変形で振動応答を示す¹⁾。また弾性は一般に非保存的であるという問題に対しスピンを定義し直す研究²⁾もある。しかし、こうした共回転応力速度は材料のせん断抵抗特性を正確に表現していない可能性がある。そこで本研究では、材料に追従して変形する座標系から定義した Truesdell 応力速度などと対峙させ、せん断抵抗特性の適用範囲の違いを考察した。

2. 客観的な応力速度とその間の関係

応力速度のうち共回転的な Cauchy 応力と Kirchhoff 応力の Jaumann 速度 $\overset{\nabla}{\sigma}$, $\overset{\nabla}{\tau}^K$, ゆがんだ座標系で観察した Oldroyd 応力速度 $\overset{\square}{\sigma}$ と Truesdell 応力速度 $\overset{\nabla}{\sigma}$ を取り上げ比較する。前者2つと後者2つの差は $(d_{ik}\sigma_{kj} + d_{jk}\sigma_{ki})$ であるが、この違いを明確に示すために、さらに改訂した応力速度 $\overset{\nabla}{\sigma}^{\text{mod}}$, $\overset{\square}{\sigma}^{\text{mod}}$ も用いる。

$$\overset{\nabla}{\sigma}_{ij} \equiv \dot{\sigma}_{ij} - w_{ik}\sigma_{kj} - w_{jk}\sigma_{ki}, \quad (1a)$$

$$\overset{\nabla}{\tau}_{ij}^K \equiv \overset{\nabla}{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij}d_{kk}, \quad \overset{\nabla}{\sigma}_{ij}^{\text{mod}} \equiv \overset{\nabla}{\sigma}_{ij} - \sigma_{ij}d_{kk} \quad (1b, c)$$

を Jaumann 速度系列と呼び

$$\overset{\square}{\sigma}_{ij} \equiv \overset{\nabla}{\sigma}_{ij} - (d_{ik}\sigma_{kj} + d_{jk}\sigma_{ki}), \quad (2a)$$

$$\overset{\nabla}{\sigma}_{ij} \equiv \overset{\square}{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij}d_{kk}, \quad \overset{\square}{\sigma}_{ij}^{\text{mod}} \equiv \overset{\square}{\sigma}_{ij} - \sigma_{ij}d_{kk} \quad (2b, c)$$

を Truesdell 速度系列と呼ぶことにする。

3. Timoshenko 梁のせん断構成則

上述の Truesdell 速度系列は、例えば梁の断面に生じた直応力とせん断応力が直交しない方向成分である場合うまく記述できると推測できる。そこで、いわゆる Timoshenko 梁理論のせん断に関する2つの構成則を引用³⁾し、弾性構成則と比較する。まず高次の理論としては、軸力 N は図-1のように、断面の法線方向 ν とずれて生じる。そのためせん断力 V は

$$N = EA\epsilon, \quad V = Gk_T A\gamma + N \frac{\gamma}{1 + \epsilon} \quad (3a, b)$$

となる。ここに、 ϵ は軸の伸び、 γ はせん断変形、 E は Young 率、 G はせん断弾性係数、 A は断面積、 k_T

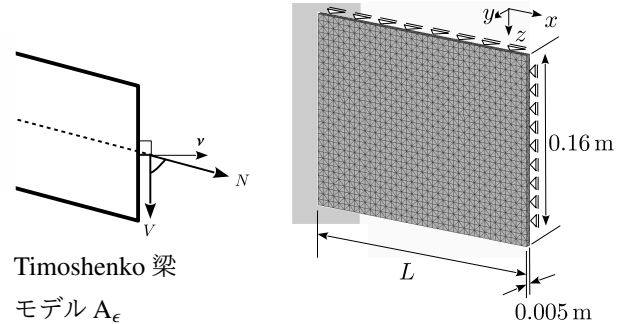


図-1 Timoshenko 梁
モデル A_ϵ

図-2 解析に用いた梁

は補正係数である。せん断力の第1項は断面のせん断変形 γ による成分であるが、第2項は図-1のような N が持つ V 方向成分である。このモデルを「モデル A_ϵ 」とする。これに対して N の方向のずれを無視したものを「モデル B_ϵ 」と呼ぶことにする。

この2つのモデルの違いは短い柱の座屈で顕著になり、前者モデルによる座屈荷重は Engesser 公式⁴⁾と呼ばれ、後者は改訂 Engesser 公式と呼ばれる。モデル B_ϵ はちょうどせん断変形を無視して回転のみに追従した共回転的な座標系で N と V を評価していることに相当する。そこで、前節で定義した2系列の応力速度で定義した弾性の特性の差異を、この Timoshenko 梁理論のせん断の構成モデルの違いと比較して考察する。

4. 数値結果と考察

(1) 片持ち梁にせん断応力を与えた場合の抵抗特性

せん断の影響が顕著になるように、図-2のような $L = 0.2 \text{ m}$ の非常に短い片持ち梁の自由端に z 方向にせん断力 P を与えた。ねじれが生じないように梁全体にわたって y 方向は拘束した。図-3に結果を示した。横軸は自由端の z 方向変位 W を L で除した値、縦軸は荷重を正規化した PL^2/EI である。 L は変形前の値、梁の断面二次モーメント I は変形後の値を用いている。Truesdell 速度系列の場合はモデル A_ϵ の挙動に近く、特に Truesdell 応力速度ではほぼ重なる。一方で Jaumann 速度系列を用いた場合には、変位が大きくなるにつれて梁理論による解との差が大きい。これは文献¹⁾にある大きなせん断変形に対して振動抵抗を示すという問題点が現れたためであると考えられる。

Key Words: 弾性, 客観的な応力速度, せん断変形

〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06 東北大学大学院工学研究科土木工学専攻構造強度学研究室

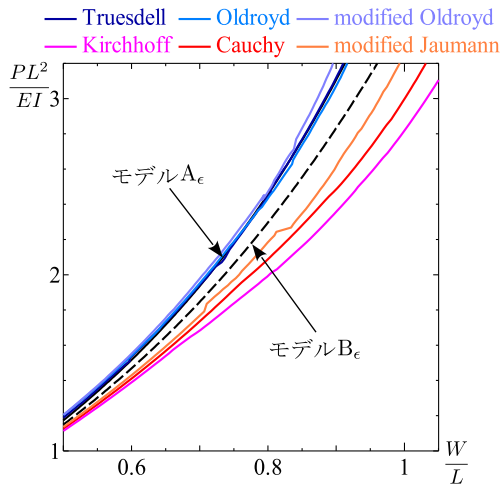


図-3 せん断力に対する応答

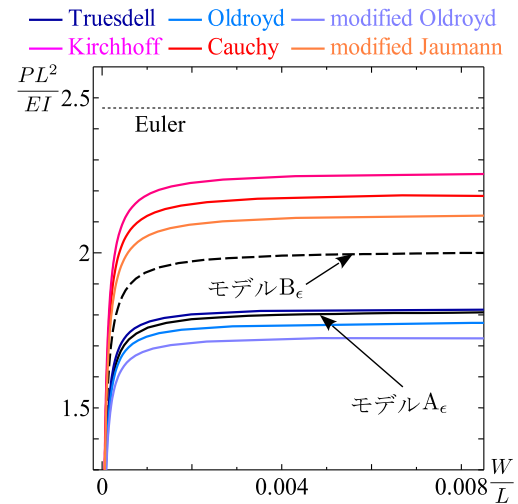


図-4 座屈後の挙動

(2) 初期不整のある柱の座屈後挙動

(1)と同様の片持ち梁の先端に z 方向の初期たわみ 0.001 m を与えて 0.5% だけ傾けた状態の先端に軸力をかけて座屈させた。これにより、座屈直前のせん断変形が小さい状態における抵抗特性を観察することができる。図-4に結果を示した。ここでの P は軸力である。この場合も Truesdell 応力速度を用いるとモデル A_ϵ の挙動とほぼ重なり、Truesdell 速度系列の他の応力速度を用いた場合もそれに近くなっている。一方で Jaumann 速度系列の場合は Euler 荷重とモデル B_ϵ の座屈荷重の間の荷重で座屈した。以上の結果から、Jaumann 速度系列はせん断変形の影響を十分には考慮できていないモデル B_ϵ の方に近い特性しか持っていないことがわかる。

(3) 柱の座屈荷重

せん断変形の無いまっすぐな柱の座屈荷重 P_{cr} を、接線剛性の正值性が失われる点でとらえた。 L はさらに短いものも含め、 0.1 m , 0.125 m , 0.15 m , 0.175 m , 0.2 m , 0.3 m , 0.4 m のそれぞれの場合で解析した。結果を図-5に示した。横軸は梁の細長比 $\lambda = L/\sqrt{I_A}$ 、縦軸は座屈荷重を無次元化した P_{cr}/EA である。 L は変形前の値、 I と A は変形後の値を用いている。Truesdell 速度系列の場合は細長比に関わらずモデル A_ϵ の座屈荷重と良く整合した。一方で Jaumann 速度系列では、モデル B_ϵ の座屈荷重や改訂 Engesser 荷重にどちらかといえば近い結果となった。

5. まとめ

Timoshenko 梁理論が持つ2種類の構成モデルと比較することにより、種々の応力速度を用いた場合の歪弾性が持つせん断抵抗特性を比較した。その結果、Jau-

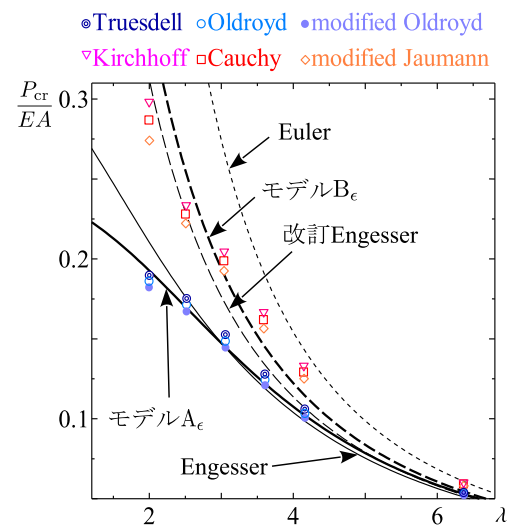


図-5 柱の細長比と座屈荷重の関係

mann 速度系列は、直応力とせん断応力の直交性が崩れるような材料のせん断抵抗特性を精度よく表すことができないことがわかった。したがって、例えば金属単結晶のような材料の構成モデルに限定して用いるのが適切であると考えられる。これに対し Truesdell 速度系列は、せん断変形の影響を、その変形の大小に関わらず精度よく表現できることが明らかになり、適用できる材料の範囲は広いと考えられる。

参考文献

- 1) Lee, E.H., Mallett, R.L. and Wertheimer, T.B.: Stress analysis for anisotropic hardening in finite-deformation plasticity, *J. Appl. Mech.*, Trans. ASME, Vol.50, pp.554-560, 1983.
- 2) Har, J.: A unified stress update algorithm for explicit transient shell dynamics with combined isotropic-kinematic hardening in Eulerian rate-type phenomenological finite elasto-plasticity models, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, Vol.196, pp.3248-3275, 2007.
- 3) Iwakuma, T.: Timoshenko beam theory with extension effect and its stiffness equation for finite rotation, *Comput. Struct.*, Vol.34, pp.239-250, 1990.
- 4) Timoshenko, S.P. and Gere, J.M.: *Theory of Elastic Stability*, Second Edition, McGraw-Hill, 1961.