

弾性挙動の空間変動を有するバラスト道床を対象とした スペクトル確率有限要素法軌道振動解析

新潟大学大学院自然科学研究科 学生員 渡邊 あゆみ
新潟大学大学院自然科学研究科 正会員 紅露 一寛
新潟大学工学部建設学科 正会員 阿部 和久

1. はじめに

列車走行時の車両と軌道との連成振動現象は、鉄道騒音・振動、列車の乗り心地、及びバラスト道床沈下などの軌道破壊に影響を及ぼす。そのため、軌道振動特性の把握と軌道設計に活用することを目的として、車輪・軌道系の連成振動解析がこれまで行われてきた。

これまでの軌道振動解析では、使用する軌道各部の物性値はその力学特性から評価される的な物性値を与えて決定論的に行われてきた。実際の軌道の構成要素には、さまざまなばらつきが存在するものの、それらを考慮した振動応答の変動量の定量評価した先行研究は少なく¹⁾、材料物性値の空間変動を考慮したものは存在しない。

本研究では、力学挙動に空間的な変動が含まれる碎石粒子の集合体であるバラスト道床に着目し、その Young 率の空間変動が軌道各部の動的応答の解析結果に及ぼす影響を、スペクトル確率有限要素法 (SSFEM)²⁾を用いて評価する。解析を行う際には、著者らが構築した解析手法³⁾をもとに、波動の放射を考慮するための粘性境界⁴⁾を導入し、バラスト道床の Young 率の空間変動が軌道の各部動的応答に及ぼす影響について評価・検討する。

2. 確率有限要素法に基づく軌道振動解析

(1) 車輪・軌道系の連成振動解析

連成振動解析モデルは、図 1 に示すように、レールを Euler ばり要素を用いた有限要素モデル、車輪・まくらぎを質点、レールと車輪の接触力をばね、軌道パット及び防振パットを Voigt ユニット、バラスト道床部は 2 次元線形弾性体モデルで表現する。時間積分は陰的な直接積分で処理する。バラスト道床部での i 番まくらぎ位置直下の上面鉛直変位 $u_{b,i}$ は、Polynomial Chaos(PC) 展開を用いて次式で表すことができる。

$$u_{b,i}(\xi, t) = \sum_{n=1}^{N_c} \Phi_n(\xi) \bar{u}_{b,i,n}(t) \quad (1)$$

$\Phi_n(\xi)$ は多項式カオス、 N_c は展開項数、 $\bar{u}_{b,i,n}$ は PC 展開の展開係数である。 $u_{b,i}$ の PC 展開第 k 項目の展開係数 $\bar{u}_{b,i,k}$ は、時間域 Green 関数とまくらぎ・道床間作用力との畳み込

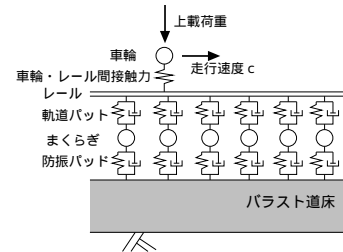


図 1 車輪・軌道系の連成振動解析モデル

み積分を用いて、次式で与える。

$$\bar{u}_{b,i,k}(t) = \sum_{n=1}^{N_c} \sum_{j=1}^{N_s} \int_0^{t+} \bar{F}_{s,j,n}(\tau) \bar{G}_{f,i,j,k,n}^*(t-\tau) d\tau \quad (2)$$

ここで、Green 関数 $\bar{G}_{f,i,j,k,n}^*(\tau)$ は時刻 $\tau = 0$ での、 j 番まくらぎ位置におけるまくらぎ・道床間作用力が $\bar{F}_{s,j} = \delta(\tau) \Phi_k(\xi)$ ($\delta(\tau)$: Dirac のデルタ関数) で与えられた時の、時刻 $\tau = t$ における i 番まくらぎ直下での道床上面鉛直変位 $u_{b,i}$ の PC 展開の第 k 項の展開係数と定義する。また、 $\bar{G}_{f,i,j,k,n}^*(\tau)$ は SSFEM を用いた動弾性解析において数値的に求める。

(2) SSFEM を用いたバラスト道床の動弾性解析

時間域 Green 関数の作成にあたり、バラスト道床の Young 率 E の空間変動は、Karhunen-Loeve(K-L) 展開²⁾により次式で与える。

$$E(\mathbf{x}, \theta) = \bar{E}(\mathbf{x}) + \sum_{m=1}^{N_k} \xi_m(\theta) \sqrt{\lambda_m} f_m(\mathbf{x}) \quad (3)$$

ここで、 $\bar{E}$ は E の期待値、 ξ_m は確率変数、 λ_m 、 $f_m(\mathbf{x})$ はそれぞれ E の変動係数の共分散関数の固有値と固有関数である。本研究では、共分散関数を $C(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sigma_E^2 \exp\{-|x_1 - y_1|/b_1 - |x_2 - y_2|/b_2\}$ (σ_E : E の標準偏差、 b_1, b_2 : 相関長さ) で与える。

道床部について、運動方程式を弱形式で表し、式 (3) を代入して有限要素近似を導入する。さらに、節点変位と等価節点力に PC 展開を導入し、と PC 展開の基底関数を重みとした Galerkin 法を適用し期待値をとると、次式のような $2N_d \times N_c$ 次元、(N_d : 節点数) の連立常微分方程式を得る。

$$[\tilde{\mathbf{M}}] \{\ddot{\tilde{\mathbf{U}}}\} + [\tilde{\mathbf{C}}] \{\dot{\tilde{\mathbf{U}}}\} + [\tilde{\mathbf{K}}] \{\tilde{\mathbf{U}}\} = \{\tilde{\mathbf{F}}\} \quad (4)$$

ここで, $[\tilde{M}]$, $[\tilde{C}]$, $[\tilde{K}]$ はそれぞれ質量行列, 減衰行列, 剛性行列であり, $\{\tilde{U}\}$, $\{\tilde{F}\}$ はそれぞれ節点変位ベクトル, 等価節点力ベクトルである.

(3) 粘性境界の導入

本研究では, バラスト道床の側方に粘性境界条件を導入する. 側方の部分境界 Γ_d が, 単位外向き法線ベクトル y 方向成分 $n_2 = 0$ となる粘性境界とすると, Γ_d の境界条件は表面力によって次式で与える.

$$\begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\rho V_p n_1 \dot{u}_1 \\ -\rho V_s n_1 \dot{u}_2 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

ここで, ρ は質量密度, V_p , V_s はそれぞれ P 波, S 波の伝播速度であり, $V_p = \gamma_p(\rho, \nu) \sqrt{E}$, $V_s = \gamma_s(\rho, \nu) \sqrt{E}$ (ν : Poisson 比) と表すことができる. ここで, $\sqrt{E}$ に K-L 展開を適用し, $\xi_n = 0$ まわりで Taylor 近似すると, 次式で表すことができる.

$$\sqrt{E} \approx \sqrt{E} + \sum_{m=1}^{N_k} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{E}} \cdot \sqrt{\lambda_m} f_m \xi_m \quad (6)$$

V_p , V_s の定義式を, 式 (6) を式 (5) に適用し, 運動方程式と同様に離散化すると, 粘性境界項は $[\tilde{C}_a]\{\dot{\tilde{U}}\}$ の形で表すことができる. したがって, 式 (4) は次式になる.

$$[\tilde{M}]\{\ddot{\tilde{U}}\} + [\tilde{C} + \tilde{C}_a]\{\dot{\tilde{U}}\} + [\tilde{K}]\{\tilde{U}\} = \{\tilde{f}\} \quad (7)$$

3. 軌道各部の動的応答への影響評価

バラスト軌道の動弾性解析は, 図 2 のようにまくらぎ 13 本を 0.6m 間隔に配置し, 境界は下方を完全固定, 側方に粘性境界を導入したものに設定する. 車輪は領域中央から左に 1.8m の位置から走行速度 10m/s で 図 1 の右方向に走行する. K-L 展開の項数は $N_k = 4$, PC 展開の次数を $n = 1$ としたため, PC 展開項数は $N_c = 5$ となる. バラスト材の Young 率の期待値は $\bar{E} = 88(\text{MPa})$ と与え, その他の物性値は既往の研究を参考に設定した.

図 3, 図 4, 図 5 に, それぞれまくらぎ No.7 におけるバラスト・まくらぎ間作用力, まくらぎ・レール間作用力, 車輪・レール間作用力の期待値と標準偏差を示す. まくらぎへの作用力の標準偏差は, 期待値同様, 観測まくらぎ直上に車輪が到達した時点で最大となるが, 変動係数で 0.3% 程度であり, E の変動と比較するとかなり小さい値を示す. また, 変動係数と相関長さは小さいほど作用力の標準偏差は小さくなる. 車輪・レール間作用力でも同様の傾向が認められるが, バラスト道床から離れた位置の応答であることもあり, 変動の度合いは上記 2 種類の作用力の変動と比べてかなり小さくなることがわかった.

謝辞

本研究は JSPS 科研費 15K06177 の助成を受けたものです.

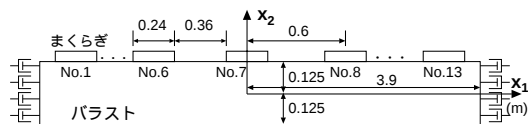


図 2 バラスト道床部の解析モデル

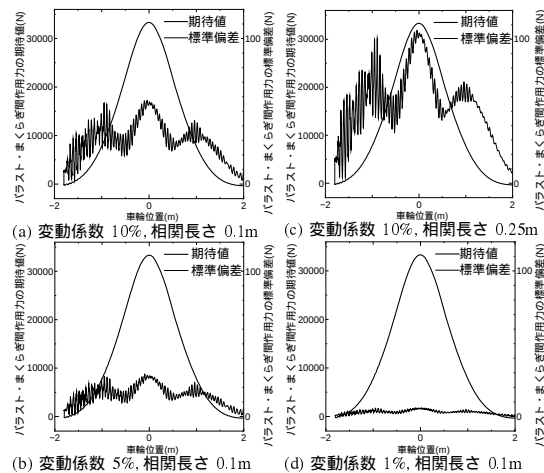


図 3 バラスト・まくらぎ間作用力の期待値と標準偏差

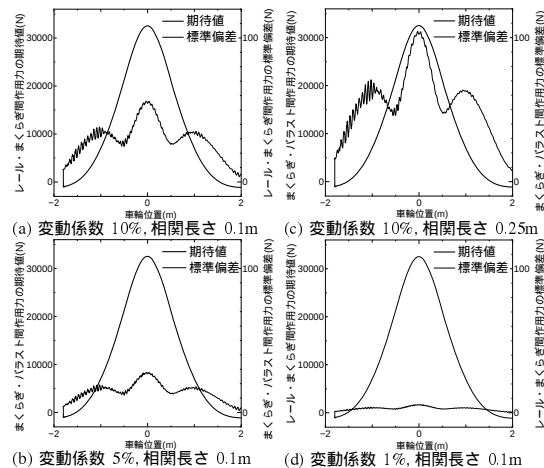


図 4 まくらぎ・レール間作用力の期待値と標準偏差

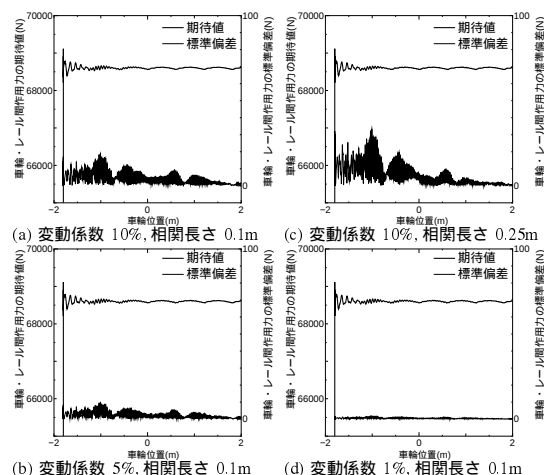


図 5 車輪・レール間作用力の期待値と標準偏差

参考文献

- 1) Rhayma, N., Bressollette, Ph, Breul, P., Fogli, M. & Sausine, G. : A probabilistic approach for estimating the behavior of railway tracks. *Engrg. Struct.*, Vol.33, pp.2120-2133, 2011.
- 2) Ghanem, R. G. & Spanos, P. G. : Stochastic finite elements. Dover, 1991.
- 3) 紅霞一寛, 金山由布子, 阿部和久 : バラスト材の弾性挙動の空間変動に起因するまくらぎ・道床間作用力の変動量評価のためのスペクトル確率有限要素法解析, 第 18 回土木学会応用力学シンポジウム講演概要集, pp.181-182, 2015.
- 4) Lysmer, J. & Kuhlemeyer, R.L. : Finite dynamic model for infinite media. *J. Engrg. Mech. Division, Proc. ASCE*, Vol.95, No.EM4, pp.859-877, 1969.