

注水孔・揚水孔の簡易モデルにおける点源周り要素分割数の影響評価による適用性検証

清水建設 正 ○山田俊子・正 櫻井英行 千葉工業大学 正 鈴木誠

1. はじめに

注水・揚水孔は他の構造物や解析領域の大きさに比べて非常に小さな径を有するため、大規模なFEM浸透流解析モデルでは孔の形状を実寸法で要素分割することは難しい。そこで注水・揚水孔を節点群で表し、点源の集合として扱うことがしばしば行われる。しかし、点源周辺の要素サイズと孔の実寸法との乖離が大きいほど、流量や水頭分布に関する解析精度が低下することは知られている¹⁾。著者らはこの問題を解決するため、点源周辺の要素透水係数を補正する近似式を提案し、要素サイズの影響による誤差を低減できることを示してきた²⁾。本報告では点源を囲む要素の分割数が補正式の適用性に与える影響を数値実験により検証する。

2. 点源の相当半径補正式の導出

図1に示す水平で均質な透水性の被圧帯水層中の単孔から、地下水を一定量揚水(注水)する二次元放射状流の場合、定常状態の流量 Q および任意の位置 r における全水頭 h は次式で表される。

$$Q = \frac{2\pi k D (H - h_w)}{\ln(R/r_w)} \quad (1)$$

$$h = \frac{Q}{2\pi k D} \cdot \ln(r/r_w) + h_w \quad (2)$$

ここで、 k は透水係数、 D は透水層厚さ、 r_w は揚水孔の半径、 h_w は揚水孔の全水頭、 H は揚水孔中心からの距離 R における全水頭である。

この問題に対し、図1に示すように揚水孔を点源として節点で表し、点源を囲む n 等分に分割された三角形線形要素群を用いたモデル化を考える。点源と点源以外の節点を結ぶ辺の長さを Δl とすると、点源となる節点に集まる流量 Q' はこれら要素群のFEM方程式から次式のように表すことができる。

$$Q' = \alpha k D (H - h_w) \quad (3a)$$

$$\alpha = n \cdot \left(\frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \right) \quad (3b)$$

$$n = \frac{2\pi}{\theta} \quad (3c)$$

ここで、図1の距離 R の代わりに図2の要素サイズ Δl を用い、式(1)および式(3a)の Q と Q' が等しいとして r_w について解くと次式²⁾が得られる。

$$\tilde{r}_w = \Delta l \cdot \exp\left(-\frac{2\pi}{\alpha}\right) \quad (4)$$

式(4)の右辺は揚水孔を節点に代表させた場合の点源の半径に対応しており、本研究では相当半径 $\tilde{r}_w$ として表す。本来であれば、この相当半径 $\tilde{r}_w$ と真の揚水孔半径 r_w とが等しくなるように、点源を囲む要素のサイズ Δl を設定する必要がある。しかし、実務では節点・要素数の制限などから、 Δl は式(4)を満足するように十分小さくできない場合が多い。そこで本研究では、点源となる節点を囲む要素の透水係数を修正することによって点源の相当半径を補正することを提案する。式(3a)において点源を囲む要素の透水係数を k' として、式(1)と式(3a)(3b)(3c)における Q と Q' が等しいとすると、 k' は次式により表される²⁾。

$$\frac{k'}{k} = \frac{2\pi}{\alpha \cdot \ln(\Delta l/r_w)} \quad (5)$$

すなわち、式(5)により k' を定めれば、 Δl が任意であっても、節点でモデル化した点源の相当半径 $\tilde{r}_w$ を揚水孔の実半径 r_w と等価にすることができる。

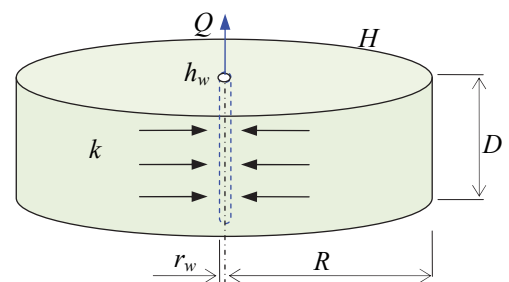


図1 被圧帯水層中の二次元放射状流

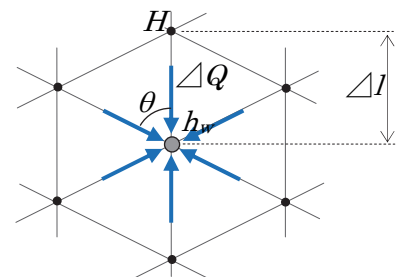


図2 点源周りの三角形線形要素群

キーワード: 浸透流解析, 有限要素法, 点源, 要素サイズ, 相当半径

連絡先: 〒104-8370 東京都中央区京橋 2-16-1 清水建設(株)土木技術本部 TEL(03)3561-3919

3. 数値実験による適用性の検証

点源の相当半径を補正する式(5)には点源を囲む要素の分割数 n がパラメータとして含まれる。そこで、要素分割数の影響について、定常浸透流問題を対象とした補正式を適用したFEMの解析結果と理論解との比較により検証を行う。図3は点源周りの要素分割数 $n=6$ 、すなわち式(3c)より分割角度 $\theta=60^\circ$ としたときの解析モデルである。問題の軸対称性を考慮して、点源を中心とした領域を三角形線形要素を用いて分割した。解析領域の半径 r 方向の要素サイズ Δl は2.0mとした。点源の半径 r_w は0.05mとし、全水頭 h_w として100.0mを与えた。解析領域の範囲 R は点源中心から100mとし、領域の境界に全水頭 H として0.0mを与えた。

点源周りの要素分割数 n (分割角度 θ)をパラメータとして、式(5)による点源の相当半径を補正した解析結果と理論解を比較するケーススタディを実施した。表1に解析ケースを示す。相当半径の補正を行ったケースでは、点源となる節点を有する一つの要素の透水係数を k' に修正した。

図4は式(1)の理論解 Q_0 に対するFEM解析結果 Q の点源流量比である。点源の相当半径を補正しない結果は、点源周りの要素分割数 n の減少(分割角度 θ の増大)に伴って理論解との差が大きくなる。これは点源の半径が過大評価されるためである。ただし、ここで示す理論解との差には要素分割数の影響も含まれる。分割数と要素サイズを考慮して相当半径の補正を行った流量比の結果は、点源周りの要素分割数 n によらずに理論解と良い一致を示した。

理論解およびFEM解析結果の半径 r 方向の全水頭プロファイルを図5に示す。点源中心からの距離 r における全水頭 h の理論解は式(2)により算出した。橙色の太線が理論解、赤いマーカーは点源の相当半径の補正なしの解析結果、青いマーカーは相当半径を補正した本手法の解析結果である。本手法の結果は要素分割数 n によらず理論解と良好な一致を示した。

4. おわりに

FEM 浸透流解析における点源を用いた注水・揚水孔のモデル化に関して、点源周りの要素分割数が与える影響を数値実験により検証した。著者らが提案する補正式を適用することにより、点源周りの要素分割数によらず従来方法と比較して大幅な解析精度向上を可能とする見通しを得た。

参考文献

- 1) Kono, I. : The equivalent radius of a source in numerical models of groundwater flow, Proc. of JSCE, No.218, pp.103-107, 1973.
- 2) 山田俊子, 櫻井英行, 鈴木誠 : 有限要素法を用いた浸透流解析における注水・揚水孔の実用的な簡易モデル, 土木学会論文集C, Vol.71, No.4, pp.407-417, 2015.
- 3) M,Muskat. : The Flow of Homogeneous Fluids Through Porous Media, McGRAW-HILL, 1937.

表 1 解析ケース

解析ケース	要素分割数 n	分割角度 θ°	点源 透水係数比 k'/k	点源 透水係数 補正
12	12	30	1.0	補正なし
12r	12	30	0.52973	補正あり
6	6	60	1.0	補正なし
6r	6	60	0.49169	補正あり
4	4	90	1.0	補正なし
4r	4	90	0.42582	補正あり

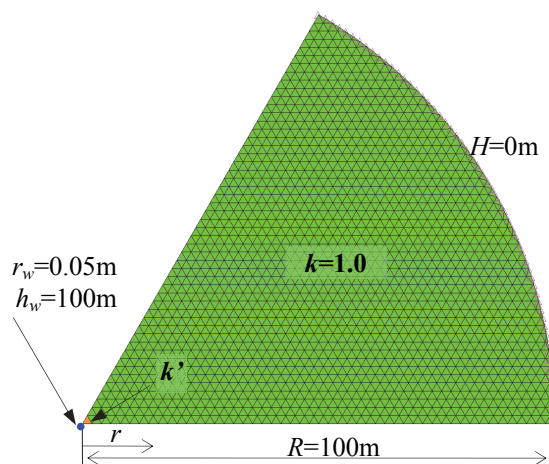


図 3 二次元放射状流単井戸問題の均質モデル

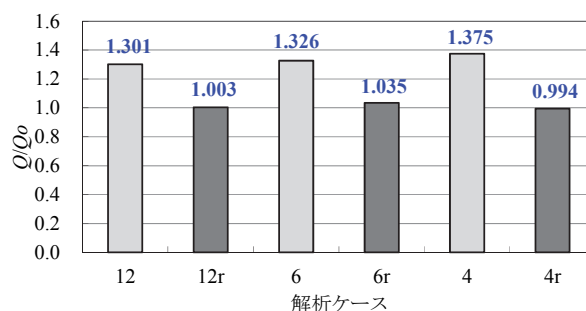


図 4 理論解 Q_0 に対するFEM解析結果 Q の点源流量比

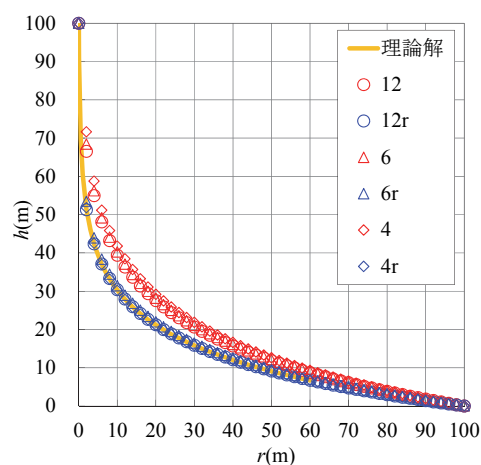


図 5 理論解とFEM解析結果の全水頭分布