# MPMによる一次元有限変形圧密問題の数値解析

京都大学大学院　学生会員　○竹内　智昭
京都大学大学院　正会員　肥後　陽介
清水建設（株）技術研究所　正会員　桐山　貴俊

## 1. はじめに

地盤の大変形解析に適用可能な粒子法の一つであるMPM を筆者らが多相系地盤の解析法である GIMP-FDM 法に拡張した[1)]．粒子法は流動や剥離などの大変形に適用される事が多いが，これらの問題には理論解が無い場合がほとんどで，多くの研究は変形の様子がもっともらしい事で適用性を示すにとどまっている．そこで本研究では，GIMP-FDM 法の大変形問題での検証を目的に，Gibson の有限変形一次元圧密理論解[2)]との比較を行った．数値解析では，粒子数格子の幅を変化させた解析を実施した．

## 2.　GIMP-FDM 連成解析法の概要

Generalized Interpolation Material Point (GIMP) は粒子法の 1 つである MPM の補間関数を一般化し，粒子が計算格子の境界付近に接近した際の数値不安定性を合理的に改良する補間手法である[3)]．支配方程式は固相，液相，気相の三相混合体の運動方程式と液相の連続式で，前者は GIMP 法，後者は有限差分法(FDM)を用いて離散化した[1)]．

## 3.　水圧のマッピング法

従来のGIMP-FDM 連成解析手法では, 粒子から格子へ水圧を移行する場合，格子内の粒子の水圧の平均値を求め格子中心の水圧とし，格子から粒子への水圧の移行の場合は，格子内のすべての粒子に格子中心と同じ水圧を与えていた．本研究では，より精度の良いマッピング法として，粒子の水圧を計算する場合，粒子と格子中央の点の距離を重みとして内挿する手法を適用した．距離を比として$\alpha, \beta$とし，これらを用いて粒子の水圧は

$$p_p = (1-\alpha)(1-\beta)\,p_{(i,j)} + (1-\alpha)\beta p_{(i,j+1)} + \alpha(1-\beta)\,p_{(i+1,j)} + \alpha\beta p_{(i+1,j+1)} \tag{1}$$

とすることができる．一辺だけ非排水条件に接している場合，隣り合う格子に同じ水圧を与えたのち，式(1)と同様に計算する．また，二辺に境界条件がある，もしくは排水条件の境界条件に接している場合，圧力の外挿を行い粒子の水圧を求める．

格子の水圧を計算する場合は，粒子と格子中央の点の距離を重みとして内挿する．すべての粒子で比を用いて移行計算を行ったのちに合計した重みで割って格子の水圧を求める．

$$p_{(i,j)} = \frac{\sum w_k p_k}{\sum w_k} \tag{2}$$

$p_k$はある粒子の水圧，$w_k$はその粒子の重みである．

## 4.　Gibson の一次元有限変形圧密理論

Gibsonの有限変形一次元圧密理論において圧密方程式は次のように表される．

$$\frac{\partial^2 E}{\partial Z^2} + N\frac{\partial E}{\partial Z} = \frac{\partial E}{\partial T} \tag{3}$$

$E(z,t) = e(z,t)/e(0,0)$，$Z = z/l$，$T = gt/l^2$，$N = \lambda l(\rho_s - \rho_f)$

ここで, $e$は間隙比, $l$は土の実質部分の高さ, $g=c_v/(1+e^2)$で$c_v$は圧密係数, $\lambda$は圧縮を表す係数, $\rho_s$は土粒子密度, $\rho_f$は水の密度である．本研究では, 式(3)をクランク＝ニコルソン法を使い離散化し解を求めた．

Gibsonが示した理論解析例と同条件で理論解を求めた．厚さ10mの大阪湾浚渫粘土層の上部に砂質土が埋め立てられ，自重と9.8kN/m$^2$の上載圧が作用した両面排水条件を想定している．初期間隙比は3.83，最終間隙比は1.49で，その他のパラメータは参考文献[2)]を参照されたい．解析対象地盤は**図1**に示すとおりである．

## 4.　GIMP-FDM 連成法による数値解

構成式は非線形弾性とし，逐次Gibsonによる応力発展式に整合するよう，弾性係数を決定した．解析モデルの代表例を**図2**に，解析ケースを**表1**に示した．

各ケースの間隙水圧の時間歴を**図3～6**に示す．黒色の線が数値解を灰色の線が理論解で，図中の数値は深度を示している．また，沈下量の時間歴を**図7**に示す．基本となるケース1では初期段階から理論解と乖離している事がわかる．深度0.25mの間隙水圧が，与えた荷重の9.8kN/m$^2$より大きく，その後の挙動も理論解との

キーワード　MPM，有限変形，圧密
連絡先　TEL: 075-383-3305　E-mail: higo.yohsuke.5z@st.kyoto-u.ac.jp

乖離が著しいのは，境界部は粒子数が少なく補間精度が低いためである．この傾向は他のケースにも共通であり，境界部では境界内の粒子のみを用いた外挿を用いるなどの改良が必要である．この点は今後の課題とし，本研究ではこれよりも深度が大きく，十分に粒子が存在する点での挙動について議論する．

ケース1では, 理論解よりも間隙水圧の消散が早いが, 沈下は理論解よりも小さい傾向にある. 1セルあたりの粒子数を増やしたケース2では深度3.125mや4.125mといった中央部での水圧は理論解と数値解が良い一致を示すようになっている事が分かる. 沈下量はケース1よりも増加し，理論解に近づく．次に格子を細かくしたケース3では10000秒程度までの水圧挙動は理論解とほぼ一致している．一方，沈下量はケース1よりも減少し理論解よりも更に小さくなった．格子を細かくし粒子数も増やしたケース4では中央部付近の粒子の水圧挙動はケース3よりも更に精度が向上するが, 地表面付近は理論解からより外れた挙動となった.

各ケースで数値解が理論解から乖離し始めるタイミングは最上部の格子にある粒子が変形によって1つ下の格子に移動する時であった．その影響を最も受けやすい地表面付近の粒子は理論解との乖離が大きい．一方，影響を受けにくい中央部の粒子は精度の良い解析結果を与えている．沈下量が理論解と大きく異なるのは，境界付近の最も変形しやすい箇所を精度よく解析できていないためと考えられる．また，Gibsonは有効応力と間隙比の関係式を用いたのに対して，本解析では増分型の非線形弾性構成則を仮定している事も沈下量の差異に影響していると考えられ今後の課題である．

## 5.　まとめ

一次元有限変形圧密理論との比較から，GIMP-FDM連成法を検証した. 格子を細かくし1つの格子当たりの粒子数を多くすると，数値解析の精度が上昇したが，粒子が格子をまたぐと解の精度が悪くなった．未知数が水圧であるu-p法の場合，速度を用いるGIMP法によるマッピングができないため，別の補間手法が必要となる．本研究の手法よりも高い精度の補間手法を適用するか，u-w-pやu-U法など水の速度を未知数とする定式化にして，GIMP法を用いる方法が望ましい．

**参考文献**

1) Higo, Y., Nishimura, D. and Oka, F., Proc. 14th IACMAG, Kyoto, Japan, pp.1761-1766, 2014., 2) Gibson, R.E., Schiffman, R.L., and Cargill, K.W., Canadian Geotechnical Journal, 18, pp.280-298, 1981., 3) Bardenhagen S.G. and Kober E.M., CMES, Vol. 5, No. 6, pp.477-495, 2004., 4) 小野耕作, 自由表面を有するビンガム流体の数値解析，京都大学修士論文，工学研究科，2011.

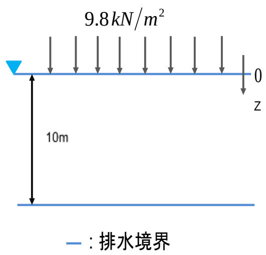

図1　解析対象地盤

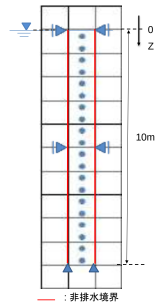

図2　解析モデル（ケース1）

表1　解析ケース

| | ケース1 | ケース2 | ケース3 | ケース4 |
|---|---|---|---|---|
| 格子幅(m) | 1.0 | 1.0 | 0.5 | 0.5 |
| 1セルの粒子数 | 2 | 4 | 2 | 4 |
| 総粒子数 | 20 | 40 | 40 | 80 |
| ⊿t (s) | 0.005 | 0.005 | 0.0025 | 0.0025 |

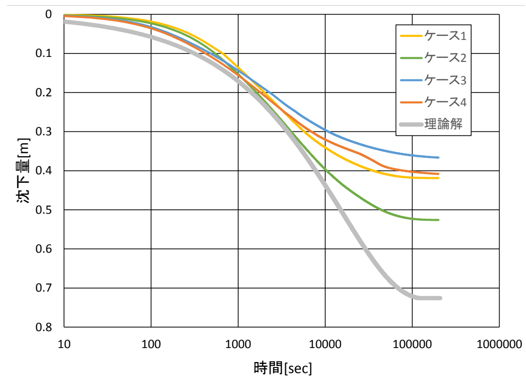

図７　沈下量の時間歴

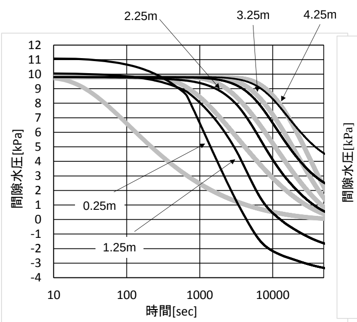

図３ 間隙水圧(ケース 1)

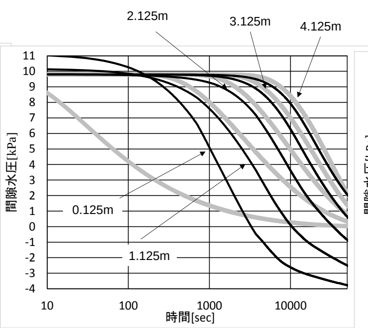

図４ 間隙水圧(ケース 2)

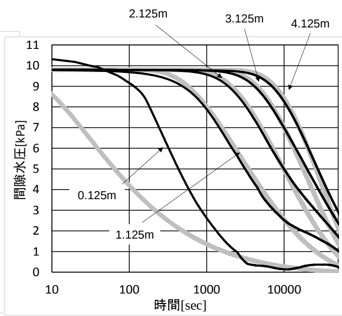

図５ 間隙水圧(ケース 3)

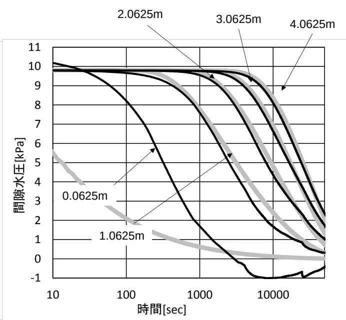

図６ 間隙水圧(ケース 4)