

弾性論に基づく円形管の応答変位法に対する批判的考察

大阪市立大学客員教授・Buried Pipe Research Center 東田 淳

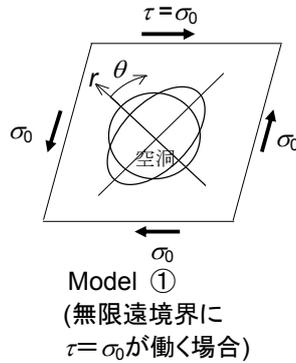
まえがき FRPM 管を除く下水道用円形管の改訂耐震設計指針¹⁾²⁾(以下、改訂指針と呼ぶ)では、応答変位法³⁾によって管の断面方向の耐震性を照査するが、その際に必要な地盤ばね定数は連続体モデルの弾性解によって決定することになった。本報告では、著者が導いた管面滑動条件の地震時連続体モデルの解を用いて、改訂指針が依拠する応答変位法に対して批判的考察を加えた。

連続体モデルから求められるばね定数

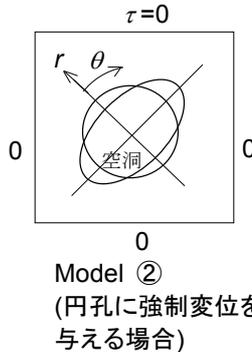
地震時連続体モデルには、管の有無と無限遠の境界条件の違いの組み合わせによって図-1(円孔が楕円状に変形する場合)と図-2(円管が楕円状に変形する場合)に示す Model ①~Model ④の4通りがある。各図の枠内に、円孔面あるいは管面位置の $r=a$ における垂直応力 σ_r と法線方向変位 u_r 、ならびに法線方向ばね定数に相当する σ_r と u_r の比: $k = \sigma_r / u_r$ を示した。いずれも空洞面または管面の境界条件はせん断応力が働かない滑動条件である。

改訂指針では、ばね定数の算定式として図-1の Model ②に対して Muir⁵⁾が求めた k_2 を採用している。一方、筆者は図-2に示した Model ③の解⁶⁾⁷⁾を求め、この解によって算定した垂直土圧 σ_r 、および管壁の曲げひずみの分布が遠心実験の測定結果と良好に近似することを確認した⁷⁾⁸⁾。よって埋設管の土圧変形挙動を調べる際には、ばね定数を介さずに東田による解を直接用いれば良いが、改訂指針のばね定数 k_2 と対比するためにばね定数 k_3 を求めると、 $k_3 = \sigma_{r3} / u_{r3} = 9EI / a^4$ が得られた。

k_2 と k_3 の関係を以下に示す。Model ②によって円孔変位 u_{r2} を、Model ③によって管変位 u_{rp3} を求め、両者の差 $(u_{r2} - u_{rp3})$ に k_2 を乗じて管に働く σ_{rp3} が生じると仮定すると、 $\sigma_{rp3} = k_2(u_{r2} - u_{rp3})$ が得られ、この式に東田による解: $\sigma_{rp3} = k_3 u_{rp3}$ を代入して $\xi^* = k_2 / k_3 = a^4 k_2 / (9EI)$ とおけば、 $u_{rp3} = \xi^* / (1 + \xi^*) \cdot u_{r2}$ が得られる。

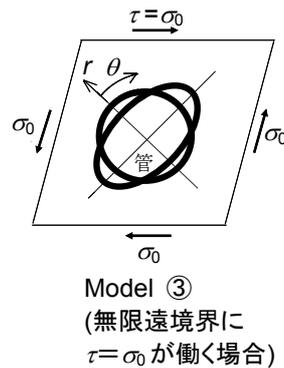


a を空洞の半径、 u_r を空洞の法線方向変位とすれば、地盤中の r における垂直応力 σ_r 、せん断応力 $\tau_{r\theta}$ 、法線方向変位 u_r は次式となる⁴⁾。
 $\sigma_r = \sigma_0(1 + 3a^4/r^4 - 4a^2/r^2)\cos 2\theta$,
 $\tau_{r\theta} = -\sigma_0(1 - 3a^4/r^4 + 2a^2/r^2)\sin 2\theta$
 $u_r = \sigma_0/2\mu \cdot \{(1 - 2\nu)r - (1 - 2\nu)a^4/r^3 + 4(1 - \nu)a^2/r\} \cdot \cos 2\theta$
 $r = a$ において
 $\sigma_{r1} = 0, \tau_{r\theta 1} = 0, u_{r1} = 2a(1 - \nu)\sigma_0/\mu \cdot \cos 2\theta$
 よって、Model ①のばね定数 k_1 は次式となる。
 $k_1 = \sigma_{r1}/u_{r1} = 0$

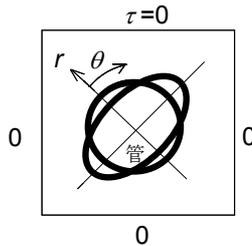


空洞面に $u_r = A_0 \cos 2\theta$ と σ_r を与える。空洞面で $\tau_{r\theta} = 0$ (滑動条件)を与えた時の解⁵⁾より、 $r = a$ における σ_r と u_r は次式となる。
 $\sigma_{r2} = -6A_0\mu/(5 - 6\nu) \cdot a^{-1} \cos 2\theta, u_{r2} = A_0 \cos 2\theta$
 よって、Model ②のばね定数 k_2 は次式となる。
 $k_2 = -\sigma_{r2}/u_{r2} = 6\mu/\{(5 - 6\nu)a\}$
 $= 3E_s/\{(1 + \nu)(5 - 6\nu)a\}$
 注) k_2 の式でマイナスがついているのは、弾性床上の梁理論に符号の定義を合わせたためである。

図-1 円孔が楕円状に変形する場合の弾性解とばね定数



管面 $r = a$ の境界条件として、 $\tau_{r\theta} = 0$ (滑動条件)、および地盤の法線方向変位 $u_r =$ 管の法線方向変位 u_{rp} を与える。 $r = a$ における σ_r と u_r は次式で表される⁶⁾⁷⁾。 EI は平面ひずみ条件の管の曲げ剛性である。
 $\sigma_{r3} = \{12(1 - \nu)a\mu\}/\{2/3 \cdot a^4 EI + (5 - 6\nu)a\mu\} \cdot \sigma_0 \cos 2\theta$
 $u_{r3} = \{4/3 \cdot a^5(1 - \nu)/EI\}/\{2/3 \cdot a^4 \mu EI + (5 - 6\nu)a\} \cdot \sigma_0 \cos 2\theta$
 よって、Model ③のばね定数 k_3 は次式となる。
 $k_3 = \sigma_{r3}/u_{r3} = 9EI/a^4$



管に強制変位 $u_{rp} = A_0 \cos 2\theta$ を与え、管面 $r = a$ における境界条件として、 $\tau_{r\theta} = 0$ (滑動条件)と地盤の法線方向変位 $u_r =$ 管の法線方向変位 u_{rp} を与える。連続体モデルでこれらの条件を満足する解はない。よって、Model ④のばね定数 k_4 は存在しない。

図-2 円管が楕円状に変形する場合の弾性解とばね定数

キーワード: 円形埋設管、耐震設計法、設計指針、応答変位法、連続体モデル、ばね定数

連絡先: 橿原市鳥屋町 24-7 エスペランサ森川 II202 号, Buried Pipe Research Center, E-mail: tohdaj@yahoo.co.jp

一方、改訂指針がばね定数決定の根拠とした文献⁹⁾には、円孔の法線方向変位 w_r 、トンネル覆工の変位 u_r 、および ξ として、式(4.4-1): $k_r=6G/\{(5-6\nu)r_0\}$ 、式(4.4-2): $w_r=2\gamma r_0(1-\nu)\sin 2\theta$ 、式(4.4-3): $u_r=\xi/(1+\xi)\cdot w_r$ 、式(4.4-4): $\xi=r_0^4 k_r/9EI$ がそれぞれ示されている。ここに、 r_0 は円孔の半径(図-1 と 図-2 の a に相当)、 γ は管の無い自然地盤のせん断ひずみ(Model ①と③で無限遠に与えた境界応力 $\tau=\sigma_0$ によって管の無い自然地盤に生じるせん断ひずみで、 $\gamma=\tau/\mu=\sigma_0/\mu$ 、 k_r は地盤のばね定数($G=\mu$ なので $k_r=k_2$)である。さらに、式(4.4-2)の角度 θ の取り方を図-1 と 図-2 に一致させると、式(4.4-2)の $\sin 2\theta$ は $\cos 2\theta$ となり、また γ は Model ①の管面の u_{r1} に含まれる σ_0/μ に相当するので、結局、式(4.4-2)の w_r は Model ①の円孔面における u_{r1} と一致する。

ここで、Model ②の円孔の変位が Model ①の円孔の変位に等しいと仮定して $u_{r1}=u_{r2}$ と置くと、 $k_r=k_2$ なので、文献⁹⁾の式(4.4-3)の u_r と式(4.4-4)の ξ は、それぞれ u_{rp3} と ξ^* に一致する。すなわち、文献⁹⁾の式(4.4-1)～式(4.4-4)が成立するためには $u_{r1}=u_{r2}$ の条件が必要であり、この条件の成立を前提として式: $\sigma_{rp3}=k_2(u_{r2}-u_{rp3})$ を正解である $\sigma_{rp3}=k_3u_{rp3}$ の代わりに用いることができる。

設計ばね定数の誘導 管に働く垂直応力 σ_{rp3} が $\sigma_{rp3}=k_2(u_{r2}-u_{rp3})$ で算定されると仮定する。前述のように、文献⁹⁾に示された式(4.4-1)～式(4.4-4)は、 $u_{r1}=u_{r2}$ の条件において成立する。 u_{r1} は、図-1 に示した Model ①の解なので、これをそのまま u_{r2} として用いれば良い。ところが、改訂指針が依拠する応答変位法³⁾では、 u_{r1} を用いず、円孔の変位 u_{r2} を、「管の無い自然地盤がせん断される時に仮想円孔位置に生じる法線方向変位 δ_{Gr} 」と「管の無い自然地盤がせん断される時に仮想円孔位置に生じるせん断土圧による法線方向変位 Δ 」の和として得られると仮定して、 $u_{r2}=\delta_{Gr}+\Delta$ とおく。 $u_{r2}=\delta_{Gr}+\Delta$ を $\sigma_{rp3}=k_2(u_{r2}-u_{rp3})$ に代入し、 u_{rp3} を δ_{pr} 、 σ_{rp3} を σ_r 、 k_2 を k_r とそれぞれ置き、かつ $k_2\Delta$ が管の無い自然地盤のせん断土圧の法線方向成分 σ_{Gr} に等しいと仮定すると、 $\sigma_{rp3}=k_2(u_{r2}-u_{rp3})$ は、 $\sigma_r=k_2\{(\delta_{Gr}+\Delta)-\delta_{pr}\}=k_2(\delta_{Gr}-\delta_{pr})+k_2\Delta=k_r(\delta_{Gr}-\delta_{pr})+\sigma_{Gr}$ と変形できる。

この式の誘導過程では以下の2点が問題である。(1) $\sigma_{rp3}=k_2(u_{r2}-u_{rp3})$ は、 $u_{r1}=u_{r2}$ が成立する場合に正解の $\sigma_{rp3}=k_3u_{rp3}$ と一致するが、 $u_{r2}=\delta_{Gr}+\Delta$ は、円孔が存在する Model ①ではなくて、円孔が存在しない自然地盤の変位を用いて求められているので、円孔の変位 u_{r1} とは一致しない。(2) $k_2\Delta=\sigma_{Gr}$ が成立するかどうか不明である。よって、設計 σ_r の妥当性については別途検討が必要である。

設計 σ_r の妥当性の検証 設計 σ_r の妥当性を検証するため、設計 σ_r と正解である Model ③の σ_{rp3} の比較を、管の剛性 EI が 0 (ケース 1) と ∞ (ケース 2) の2通りの条件で行った。ケース 1 は管の剛性が無く、円孔が地盤中に存在する場合(≡極たわみ性管の場合)、ケース 2 は管の剛性が RC 管に近い場合(≡剛性管の場合)をそれぞれ想定した。設計土圧 $\sigma_r=k_r(\delta_{Gr}-\delta_{pr})+\sigma_{Gr}$ に含まれる δ_{Gr} と σ_{Gr} (空洞の無い自然地盤の無限遠境界に境界応力 $\tau=\sigma_0$ が働く場合に仮想管面位置 $r=a$ に生じる法線方向の変位と応力)は、図-1 と同じ座標を用いて、 $\delta_{Gr}=\sigma_0 a/(2\mu)\cdot\cos 2\theta$ 、 $\sigma_{Gr}=\sigma_0\cos 2\theta$ と求められる。また、 $k_r=k_2=6\mu/\{(5-6\nu)a\}$ 、 $\delta_{pr}=u_{rp3}$ である。

ケース 1($EI=0$)の場合、Model ③による正解は、 $\sigma_{rp3}=0$ 、 $u_{rp3}=2a(1-\nu)/\mu\cdot\sigma_0\cos 2\theta$ となる。一方、設計土圧は $\sigma_r=(-4+6\nu)/(5-6\nu)\cdot\sigma_0\cos 2\theta\neq 0$ となった。よって、 $\sigma_r\neq\sigma_{rp3}$ であり、かつ円孔面に σ_r が働くことになるため、あり得ない解である。つぎに、ケース 2($EI=\infty$)の場合、Model ③による正解は $\sigma_{rp3}=12(1-\nu)/(5-6\nu)\cdot\sigma_0\cos 2\theta$ 、 $u_{rp3}=0$ となる。一方、設計土圧は $\sigma_r=(8-6\nu)/(5-6\nu)\cdot\sigma_0\cos 2\theta$ となったので、やはり $\sigma_r\neq\sigma_{rp3}$ である。 σ_{rp3}/σ_r の値は、 ν が 0.2~0.5 の場合、1.41~1.20 となる。

以上に示した円形管の設計土圧 σ_r と正解である Model ③の σ_{rp3} の不一致は、 $u_{r2}=\delta_{Gr}+\Delta$ と $k_2\Delta=\sigma_{Gr}$ の仮定の不成立を示している。したがって改訂指針が依拠する応答変位法には再考の余地があると結論される。

参考文献 1) 日本下水道協会(2014): 下水道施設の耐震対策指針と解説 2014 年版。2) 日本下水道協会(2015): 下水道施設耐震計算例(管路施設編) 2015 年版。3) 川島一彦(1994): 地下構造物の耐震設計, 鹿島出版会。4) Timoshenko, S.P. and Goodier, J.N. (1951): Theory of Elasticity, Third Ed., McGraw-Hill Book Co.. 5) Muir Wood, A.M. (1975): The Circular Tunnel in Elastic Ground, *Geotechnique*, Vol.25, No.1, pp.115-127. 6) 東田淳・三笠正人(1986): 弾性論による埋設管の土圧の検討, 土木学会論文集, 第 376 号/III-6, pp.181-190. 7) Tohda, J., Yoshimura, H., and Maruyoshi, K. (2013): An elastic continuum model for interpretation of seismic behavior of buried pipes as a soil-structure interaction, *Proc. of the 18th ICSMGE*, 1777-1780. 8) 丸吉他(2013): 円形管の地盤せん断遠心実験に対する弾性 FEM 解析と弾性理論解析, pp.1467-1468, 第 48 回地盤工学研究発表会。9) 土木学会地震工学委員会(1998): トンネル耐震設計の方向と基本課題, トンネル耐震性研究小委員会報告。