

一様流中の空洞とくぼみが及ぼす流速場の変化とパイピングの進行に関する基礎的研究

中央大学 学生会員 ○新妻 友太
中央大学 フェロー会員 山田 正

1. はじめに

パイピング現象はフィルダムの主要の決壊要因の一つであり, Foster et al.¹⁾は過去の136のフィルダムの決壊事例を調査し, そのうちの約4割がパイピングに起因することを示している. 浸透破壊に関する既往の考え方としては, Justin²⁾による限界流速法やTerzaghi³⁾による限界動水勾配法などの判定式が存在するものの, 浸食によって水みちが進展する過程を表すものではない. 藤澤ら⁴⁾は土内部での土粒子の侵食と移動を解析するためには, 浸透水の流れとそれに伴う土粒子の内部浸食・輸送について考慮する必要があるとしている. 以上のことから分かるように, パイピング現象の進行過程を評価するためには, その空洞周りの流れ場をできるだけ正確に把握することが重要であると考えられる. 本研究では, 佐藤ら⁵⁾が行った一様流中に置かれた井戸が流速場に及ぼす研究を発展させ, 楕円と半楕円をパイピング形状のモデルとして, その縦横比と流速場の関係から, 空洞の形状が進行していく過程について理論的に考察を行った.

2. 空洞内外流速場の設定と解析

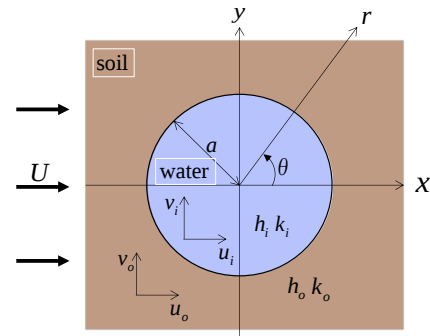
2-1. 基礎方程式と計算に用いた仮定

2次元の飽和浸透流を仮定する. 図-1 に座標系と各変数の定義, 円形空洞のイメージを示す. 基礎方程式は連続式にDarcy則を代入して得られるLaplaceの方程式を直交座標, 極座標表示した式(1)を用いる.

$$\Delta h = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial h}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2} = 0 \quad (1)$$

2-2. 円形空洞周りの一様流の解析

ここからの議論では空洞内部, 外部の物理量に対してそれぞれ添字の*i*, *o*を付ける. 佐藤ら⁵⁾はまず, 楕円形の水みちを解析する前段階として, 図-1に示した円形の空洞周りの一様流の解を導いた. 計算に用いた条件は以下の5つである. 1) 空洞の内外においてDarcy則が常に成立し, 空洞内部の透水係数 k_i は空洞外部の飽和浸透流における透水係数 k_o に対して十分に大きいこと. 2) *x*軸に対称な流れであること. 3) 空洞の内部には特



u_i, v_i, u_o, v_o : 空洞内部, 外部での x, y 方向流速 [L/T]
 h_i, h_o : 空洞内部, 外部での水頭 [L]
 k_i, k_o : 空洞内部, 外部での透水係数 [L/T]
 a : 空洞の半径 [L]
 U : 一様流速 [L/T]

図-1 円形空洞イメージ図と変数の定義

異点は存在しないこと. 4) 空洞の境界($r=a$)における境界の内部と外部の水頭 h_i, h_o が連続すること. 5) 境界に垂直な方向の流速 u_i, u_o も連続すること. これらの条件を用いて空洞の内外の水頭 h_i, h_o について解くと, 式(2), (3)に示す解析解が得られる.

$$h_i(r, \theta) = -\frac{2}{k_i + k_o} U r \cos \theta = -\frac{2}{k_i + k_o} U x \quad (2)$$

$$h_o(r, \theta) = -\frac{U}{k_o} \left(r - \frac{k_i - k_o}{k_i + k_o} \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta \quad (3)$$

さらに, 空洞内外の速度ポテンシャル ϕ_i, ϕ_o を以下の式(4)で定義する.

$$\phi_i = -k h_i, \quad \phi_o = -k h_o \quad (4)$$

式(2), (3), (4)より $\zeta = x + iy$ と置くと, 空洞内外の複素速度ポテンシャル W は式(5), (6)のように表示することができる.

$$W_i(\zeta) = 2U \frac{k_i}{k_i + k_o} \zeta \quad (5)$$

$$W_o(\zeta) = U \left(\zeta - \frac{k_i - k_o}{k_i + k_o} \frac{a^2}{\zeta} \right) \quad (6)$$

2-3. 楕円形空洞周りの一様流の解析

次に楕円形にモデル化された水みち周り流れを解くため, 円形空洞周り流れでの複素速度ポテンシャル(6)に対して等角写像論のJoukowski変換(7)を行うと楕円形周り流れの複素速度ポテンシャル(8)が得られる⁶⁾.

キーワード パイピング, 等角写像, Joukowski 変換, ポテンシャル流れ, 流線関数

連絡先 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 中央大学 理工学部 TEL 03-3817-1805

$$z = \zeta + \frac{b^2}{\zeta} \quad (7)$$

$$W_0(z) = \begin{cases} U \left(\frac{z + \sqrt{z^2 - 4b^2}}{2} + \frac{k_o - k_i}{k_i + k_o} \frac{2a^2}{z + \sqrt{z^2 - 4b^2}} \right) & (z > 0) \\ U \left(\frac{z - \sqrt{z^2 - 4b^2}}{2} + \frac{k_o - k_i}{k_i + k_o} \frac{2a^2}{z - \sqrt{z^2 - 4b^2}} \right) & (z \leq 0) \end{cases} \quad (8)$$

3. 楕円形空洞周りの流速場の特性と考察

図-3 に楕円形空洞の流れに対して横断方向軸(縦軸)の長さを固定し, 流下方向軸(横軸)をその 1, 5, 25, 100 倍にした場合の楕円形空洞周りの流線の図を示す. この結果からパイピングの進行過程に対する考察を行う. 流線は $x < 0$ の空洞上流部に流入している. さらに, 楕円の端点では流線の集中が見られることより, 流速が最大になるということがわかる. この結果はパイピング破壊発生時に生じる, 地中の弱点である空洞に水が集中して流れる現象を表現していると考えられる. 円形空洞周り流れの流線形状の妥当性は佐藤ら⁵⁾が行った Helle-Shaw 流れ実験によって検証されている. ここで, パイピングによる空洞形状の変化に対する考察を行うため, 空洞の境界の剥離速度が境界に対して法線方向の流速に比例するとして考える. その結果, 空洞は流れの横断方向に侵食されつつ, より大きな速度で上流方向へ後退されていく. 円形空洞の境界の上流側において, 境界垂直方向での流速分布を求めると式(9)が得られる.

$$u_r(r, \theta) \Big|_{r=a} = \frac{2k_i}{k_i + k_o} U \cos \theta \quad (9)$$

この結果より, 円形空洞は円弧もしくは楕円形に進行していくと推測される. 次に, 空洞の縦横比が流下方向に大きくなるほど, より遠くの流線が空洞に引き込まれることより流速が大きくなり, パイピングの進行速度は加速度的に大きくなっていくことが分かる. つづいて, 図-3に示す各図の左右の対称性より, $x=0$ における等ポテンシャル線が流れの横断方向に対して直線となることに着目する. この線上での速度ポテンシャル ϕ_i , ϕ_o をそれぞれ0であるとする, 式(4)の関係から水頭 h_i , h_o も0であることが分かる. したがって, $x=0$ の等ポテンシャル線は大気圧下に存在する水平な地表面, $x=0$ で分断された半楕円形空洞は地表面に存在するくぼみとして扱うことが可能になり, これまでの議論の空洞周り流れとして扱ってきた理論を, 地表面上に

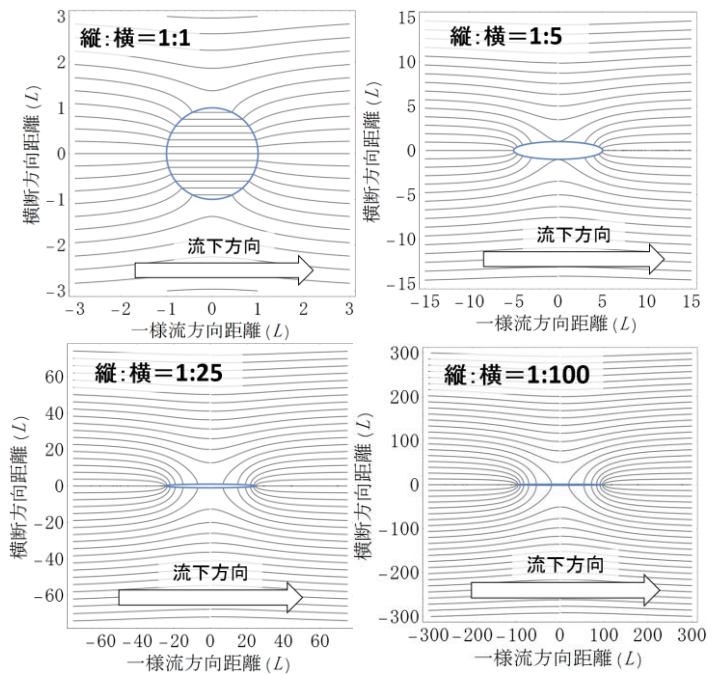


図-2 空洞の縦横比に対応する流線

存在するくぼみ周りの流れにも拡張できることを示した.

4. まとめ

佐藤らによって導かれた井戸の縦横比と流速場の関係を利用することで得られた知見を以下に示す.

- 1) 空洞の縦横比が大きくなっていく形式で浸食される場合, その浸食は加速度的に進行される.
- 2) 空洞周りの流速場を半分にするだけで, 地表面に存在するくぼみ周りの流れ場にも適用することができる.

参考文献

- 1) Foster, M., Fell, R. and Spannagle, M. : The statistics of embankment dam failures and accidents, 2000.
- 2) J.D. Justin : The Design of Earth Dams,, A.S.C.E. Trans. No.1531, 1923.
- 3) Terzaghi, K., Der Grundbruch on Stauwerken und Seine Verhütung, 1922.
- 4) 藤澤和謙, 村上章, 西村伸一: 土の内部で生じる土粒子侵食の解析手法, 農業農村工学会論文集, 第 260 号, pp.85-93, 2009.
- 5) 佐藤智宏, 江花亮, 山田正: 一様な流れ場に設置された井戸内外の流速場に関する研究, 土木学会関東支部技術研究発表会講演概要集 34 巻, 2007.
- 6) 今井功: 等角写像とその応用, 岩倉書店, 1979.