

非静水圧を考慮した水路床非均一性による水面形に関する研究

中央大学 学生員 ○洪 尔超  
 中央大学 学生員 成 岱蔚  
 中央大学 フェロー会員 山田 正

1. はじめに

静水圧分布の仮定は、流線の曲率が無視でき、あるいは水路勾配がきつなく流れの鉛直方向加速度を無視することである。しかし、流れ現象はほとんど非静水圧であり。本研究では、非静水圧を考慮して、ピカールの逐次近似法を用いて、完全流体の流れの場合が渦なしの場合、あるいはポテンシャル場にかなう流れ関数によって二次元水面形方程式の近似解を導出することである。

2. ピカールの逐次近似法により流れ関数

ピカールの逐次近似法は極限としての初期値問題の解を逐次近似して求めている方法である。まず、初期値として水平速度は(2.1)式のように仮定している。

$$u_0(x, y) = \frac{Q}{\eta(x) - z(x)} \quad (2.1)$$

$\eta(x)$ は底面から表面までの高さで、 $z(x)$ は非均一性水路床を表している。 $Q$ は単位幅流量である。また、ポテンシャル流において、水平速度  $u$  と鉛直速度  $v$  は(2.1)式を満足している。

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (2.2)$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.3)$$

$$\psi_n(x, y) = \int u_{n-1}(x, y) dy + y_{n-1}(x, y) \quad (2.4)$$

$\phi$  は速度ポテンシャルであり、 $\psi$  は流れ関数。境界条件として、水面の流線あるいは  $y=\eta(x)$  時、流れ関数  $\psi(x, y)=Q$  で、 $y=z(x)$  時、流れ関数  $\psi(x, y)=0$ 。

そして、初期値  $u_0$  を(2.4)式に代入して、境界条件を用いて、流れ関数を求めることができる。 $n=1, 2, 3, \dots$  と伴に、ピカールによりそれぞれ一次精度、二次精度等の流れ関数である。その上、導出した流れ場は、 $n$  が同じ階で非圧

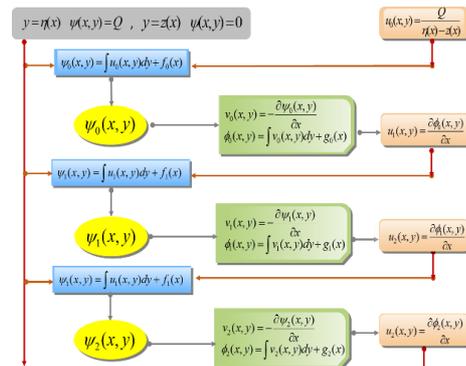


図 1 ピカールの逐次近似法流れ図

縮性流れの連続式に適用し、 $n$ は大きければ、大きいほど、非回転性流れに満足できる。具体的な逐次近似流れは図1を示している。

繰り返しの一つ流れから見ると、緑色部分とオレンジ色部分はそれぞれポテンシャルより与えられるスカラー関数(式 2.2)から得る式で。すなわち、ピカールの逐次近似法はポテンシャルを解いている。

3. 水面形方程式の導出

Benjamin の理論に基づいて、非静水圧を考慮して、ベルヌーイ定理(3.1)式で書いている。

$$R = \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + gy + \frac{p}{\rho} \quad (3.1)$$

ここで、圧力は静水圧と仮定せずに、直接  $p$  とはいている。ピカールの逐次近似法により速度分布式を(3.1)式に代入して、二乗までの項のみ考え、(3.2)式になる。ピカールの逐次近似法により流れ関数を用いて、非静水圧を考慮した水面形方程式(3.3)式を導出できた。

$$R = \frac{Q^2}{2gh(x)^2} + h(x) + z(x) - \frac{Q^2 h'(x)^2}{6gh(x)^2} + \frac{Q^2 z'(x)^2}{2gh(x)^2} + \frac{Q^2 h''(x)}{3gh(x)} + \frac{Q^2 z''(x)}{2gh(x)} \quad (3.2)$$

$$(1-R)h^2(x) + h(x)[z(x) + 2kh'(x) + 3kz''(x)] - kh'(x)^2 + 2kz'(x)^2 + 3k^2 = 0 \quad (3.3)$$

キーワード：非静水圧，流れ関数，非均一な開水路床，水理実験

連絡先 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 中央大学理工学部 TEL:03-3817-1807

E-mail:hongerchao2012@gmail.com

$K$  は流線の勾配なので、 $R$  を(3.3)式に代入すると、 $h''(x)$ に関する式(3.4)を得る。

$$h''(x) = \frac{1}{2h_0^2 q^2 h(x)} (6gh_0^3 - 6gh_0^2 h(x)^2 z(x) - 6gh_0^2 h(x)^3 + h_0^2 Q^2 h'(x)^2 - 3h_0^2 Q^2 h(x) z'(x) + 3Q^2 h(x)^2 - 3h_0^2 Q^2 z'(x)^2 - 3h_0^2 Q^2) \quad (3.4)$$

(3.4)式で  $h'(x)$  と  $h''(x)$  に対してランゲクッタ法で近似する。本研究で、水面形方程式は4次 Runge-Kutta 法を用いて解く。ピカールの逐次近似法により速度分布を用いて、水圧  $p$  を計算できる。

4. 実験の検証

N.S.Sivakumaran らの実験で用いた開水路結果と数値解により水面形の比較を行う。図2は考察の結果で、赤い点は実験結果であり、

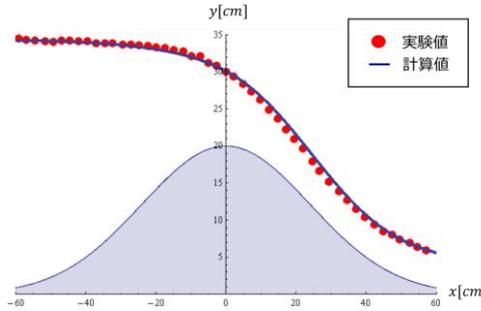


図 2 実験結果と数値解により水面形の比較

青い線は本研究で提案した式で水面形の数値解である。実験結果と数値計算結果は完全に合うと見える。図3を示すように、赤い点は N.S.Sivakumaran らの実験で底面の圧力水頭であり、青い線は本研究で提案した式で底面圧力水頭の数値解であり、またオレンジ色の線は静水圧を仮定する圧力水頭である。実験結果と本研究で提案した式で底面圧力の数値解とよく合っていると見える。

図4を示すように、赤い点は流れ場の代表点である、青い線は研究で提案した式で底面圧力水頭の数値解であり、青い矢印は代表点においてピカールの逐次漸近法によるポテンシャル流れ場の近似により速度ベクトルである。そこで、本研究で非均一な開水路床における非静水圧を考慮した水面形方程式、ピカールの逐次漸近法による非均一な開水路床におけるポテンシャル流れ場の近似する方法を提案できた。

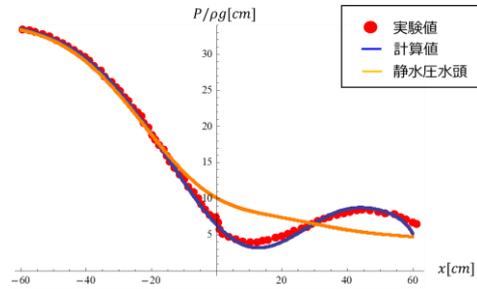


図 3 実験結果と本研究で底面圧力の数値解

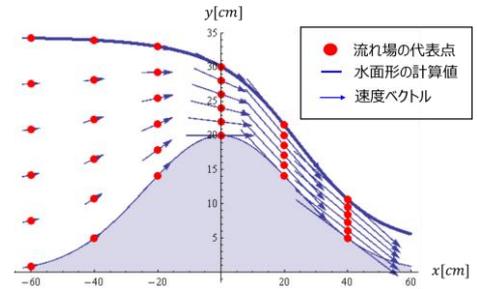


図 4 ポテンシャル流れ場の近似

5. まとめ

本研究は、非均一な開水路床における非静水圧を考慮した水面形方程式を提案した。その上、実験で式の合理性を検証すると提案された式で任意の開水路床における水面形を再現できる。ここで得られた知見を以下に示す。

- 1) ピカール逐次漸近法で非均一な開水路床におけるポテンシャルフローの流れ場を近似することができた。
- 2) 非静水圧を考慮した非均一な水路床における水面形方程式を提案できた。
- 3) 数値計算により水面形や底面における圧力を現実の流れと比較すると、両方から非均一な水路床における非静水圧を考慮した水面形は静水圧仮定の式より実験結果の水面形をよく再現できる。

しかし、別の実験と合っていないことがあります。将来には、水面形方程式の適用範囲を計算すると考えている。

参考文献

- 1) T.B. Benjamin and M.J.Lighthill.1954.On cnoidal waves and bores, proc.R.Soc.Lond.A224, 448-460
- 2) N.S.SIVAKUMARAN,T.TINGSANCHALI AND R.J.HOSKING:Steady shallow flow over curved beds, J. Fluid Mech. (1983),Vol.128p, p. 469-487