

Discontinuous Galerkin 法による浅水長波流れ解析に関する検討

中央大学大学院 学生員 凌 国明
中央大学 正会員 櫻山 和男

1. はじめに

著者らは、既報において、大規模津波解析を高精度かつ効率的に行うため安定化有限要素法に基づく 2 次元・3 次元ハイブリッド津波解析モデルの構築¹⁾を行った。既報の手法において、2 次元の解析では浅水長波方程式を用い、CG 法である SUPG 法に基づく安定化有限要素法を用いて離散化を行ったが、近年、要素間で不連続解を許容し、局所的に高次補間する可能である Discontinuous Galerkin 法 (DG 法) が注目され、特に双曲型方程式 (不連続問題) に対して有効に用いられている。

そこで、本研究では、浅水長波流れの高精度な数値解析を行うことを目的とし、浅水長波方程式の離散化手法に DG 法を適用し、移動境界手法および Slope Limiter 処理手法の導入を行った。ダムブレイク問題と底面勾配が変化する問題について本手法の妥当性および有効性を検討する。

2. 数値解析手法

(1) 支配方程式

1 次元保存型の非線形浅水長波方程式を以下に示す。

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \mathbf{S}, \quad (1)$$

ここで、 \mathbf{U} 、 \mathbf{F} 、 \mathbf{S} はそれぞれ未知変数、流束関数、ソース項に関するベクトルであり、以下のように定義される。

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \zeta \\ q \end{bmatrix}, \mathbf{F} = \begin{bmatrix} q \\ q^2/H + g(H^2 - h^2)/2 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ gH(S_o - S_f) \end{bmatrix}, \quad (3)$$

ここで、 H は全水深、 ζ は水位変動量、 q は流量、 g は重力加速度である。また、 S_o 、 S_f はそれぞれ勾配項、摩擦項であり、式 (4) に表される。

$$S_o = -\frac{\partial z_b}{\partial x}, S_f = \frac{n^2 q |q|}{H^{10/3}}, \quad (4)$$

ここで、 z_b は底面高、 n はマニング粗度係数である。

(2) DG 法による空間方向の離散化

任意要素 (x_{j-1}, x_j) に対して式 (1) に試験関数 v を掛け、部分積分を行うと、以下の弱形式が得られる。

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} v dx - \int_{x_{j-1}}^{x_j} \mathbf{F} \frac{dv}{dx} dx + \mathbf{F} v \Big|_{x_{j-1}}^{x_j} = \int_{x_{j-1}}^{x_j} \mathbf{S} v dx, \quad (5)$$

ここで、 \mathbf{U} と v の近似解として以下の補間多項式 \mathbf{U}_h と v_h を用いる。

$$\mathbf{U}_h \Big|_{\Omega_j} = \mathbf{U}_j^0(t) \tilde{\phi}_0(x) + \mathbf{U}_j^1(t) \tilde{\phi}_1(x) + \cdots + \mathbf{U}_j^p(t) \tilde{\phi}_p(x), \quad (6)$$

$$v_h \Big|_{\Omega_j} = \alpha_0 \tilde{\phi}_0 + \alpha_1 \tilde{\phi}_1 + \cdots + \alpha_p \tilde{\phi}_p, \quad (7)$$

ここで、 p は多項式の次数である。本論文では $p = 1$ とし、1 次補間を行う。なお、 $\{\alpha_i\}_{i=0}^p$ は任意スカラー関数、 $\tilde{\Phi} \equiv \{\tilde{\phi}_i\}_{i=0}^p$ は基底関数である。式 (5) を書き換えると、

$$\mathbf{M}_j \dot{\mathbf{U}}_j = \mathbf{F}_j + \tilde{\Phi}(x_{j-1}^+) \hat{\mathbf{F}}_{j-1} - \tilde{\Phi}(x_j^-) \hat{\mathbf{F}}_j + \mathbf{S}_j, \quad \text{for } j = 1, 2, \dots, N, \quad (8)$$

ここで、 \mathbf{M}_j は質量行列、 \mathbf{F}_j は流束ベクトル、 $\hat{\mathbf{F}}$ は数値フラックスベクトル、 \mathbf{S}_j はソースベクトル、 N は要素数である。DG 法では要素間で関数値の不連続を許容するため、その要素境界においての物理量収支を数値フラックスで行う。本研究では Lax-Friedrichs Flux を適用する。

$$\hat{\mathbf{F}}_j = \frac{1}{2} \left(\mathbf{F}(\mathbf{U}_j^-) + \mathbf{F}(\mathbf{U}_j^+) \right) - \frac{\lambda_{\max}}{2} (\mathbf{U}_j^+ - \mathbf{U}_j^-) \quad (9)$$

$$\lambda_{\max} = \max(|u^+ - c^+|, |u^- - c^-|, |u^+ + c^+|, |u^- + c^-|) \quad (10)$$

$$c^+ = \sqrt{gH^+}, c^- = \sqrt{gH^-} \quad (11)$$

(3) 時間方向の離散化

既往の研究²⁾において、DG 法に時間方向の離散化では空間方向補間次数より 1 次高いのが必要である。本論文では空間方向に 1 次補間するため、時間方向に 2 次の TVD (Total Variational Diminishing) Runge-Kutta 法を適用する。式 (8) の \mathbf{M}_j を右辺に移動し、右辺を $\mathbf{R}_{hp}(\mathbf{U})$ に書くと、以下の式となる。

$$\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{R}_{hp}(\mathbf{U}), \quad (12)$$

そして、以下により求解する。

$$\mathbf{U}^{[1]} = \mathbf{U}^n + \Delta t \mathbf{R}_{hp}(\mathbf{U}^n), \quad (13)$$

$$\mathbf{U}^{n+1} = \frac{1}{2} \mathbf{U}^n + \frac{1}{2} \mathbf{U}^{[1]} + \frac{1}{2} \Delta t \mathbf{R}_{hp}(\mathbf{U}^{[1]}). \quad (14)$$

また、CFL (Courant-Friedrichs-Lewy) 条件は式 (15) を適用する。

$$\max \left[\frac{\Delta t}{\Delta x} (|u| + c) \right] \leq \frac{1}{2p+1}. \quad (15)$$

(4) 水位変動量および流量に対する Slope Limiter 法

不連続面において生じる数値振動を抑えるため、Slope Limiter 法の導入を行う。本研究では Lai らによる提案した Water Surface Slope Limiter²⁾ を適用する。図 - 1 に

KeyWords : Discontinuous Galerkin 法, 浅水長波方程式, Slope Limiter, 移動境界

連絡先 : 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 TEL 03-3817-1815

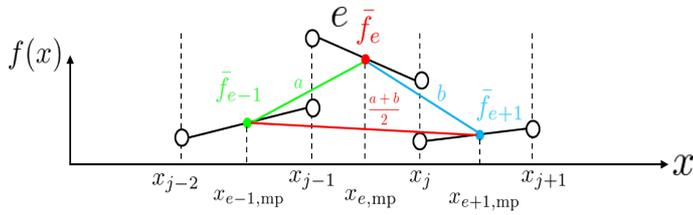


図-1 Slope Limiter 法

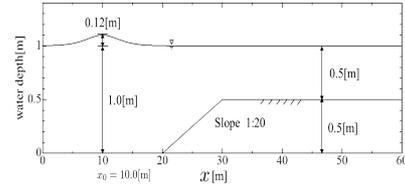


図-2 孤立波伝播問題

示すようにある要素 e の物理量 f に対して，以下の処理を行う．

$$f(x) = \bar{f}_e + (x - x_{e,mp})\sigma_e, \quad x_{j-1} \leq x \leq x_j, \quad (16)$$

ここで， \bar{f}_e は要素 e の平均値， $x_{e,mp}$ は要素中点の座標値である．なお，関数 f は水位変動量 ζ あるいは流量 q である． σ_e は式 (17) で表す，

$$\sigma_e = \frac{[\text{sign}(a) + \text{sign}(b)]}{2} \min\left(\frac{|a+b|}{2}, 2|a|, 2|b|\right), \quad (17)$$

ここで， $a, b, (a+b)/2$ はそれぞれ上流側勾配，下流側勾配，中間勾配である．

$$a = \frac{\bar{f}_e - \bar{f}_{e-1}}{x_{e,mp} - x_{e-1,mp}}, \quad (18)$$

$$b = \frac{\bar{f}_{e+1} - \bar{f}_e}{x_{e+1,mp} - x_{e,mp}}, \quad (19)$$

$$\frac{a+b}{2} = \frac{\bar{f}_{e+1} - \bar{f}_{e-1}}{x_{e+1,mp} - x_{e-1,mp}}, \quad (20)$$

(5) 移動境界処理手法

本研究では移動境界処理手法として，乾燥底面に微小水深を設ける手法³⁾を導入した．

3. 数値解析例

(1) 孤立波伝播問題

水位変動量および流量に対して Slope Limiter 処理手法の妥当性の検討を行うため，図-2 に示す底面勾配が変化する孤立波伝播問題を取り上げ，SUPG 法に基づく安定化有限要素法⁴⁾ (CG 法) の解析結果との比較を行う．計算条件として分割幅を 0.1m とし，微小時間増分量は 0.005s とする．

図-3 に 11s における CG 法と DG 法による水変動量の解析結果を示す．図より，両手法の水面形状は概ね一致しており，DG 法による解析結果の波峰は CG 法に比べて減衰が小さいことがわかる．また，Slope Limiter 処理手法の導入により，波の先端に現れたオーバーシュートおよびアンダーシュート現象が抑えられている．

(2) ダムブレイク問題

移動境界処理手法の導入により，DG 法による 1 次元の浅水長波流れ解析の有効性を検討するため，図-4 に示すダムブレイク問題を取り上げる．計算条件として， x 方向の分割幅は 0.05m，微小時間増分量は 0.0001s，微小水深は 0.001m とする．

図-4 に 1s における DG 法，CG 法の解析結果と理論解の比較を示す．全水深の図 (左) より，CG 法と DG 法

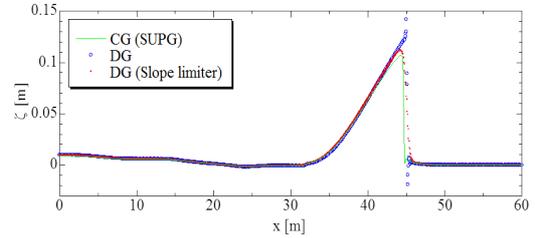


図-3 水位変動量 (11s 後)

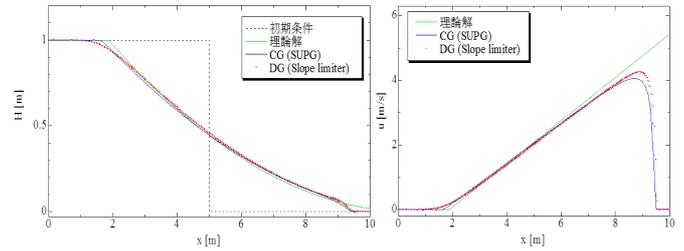


図-4 ダムブレイク問題における水深 (左) と流速 (右) (1s 後)

の解析結果は大きな差異が見られなく，理論解と良い一致を示していることが確認できた．また，流速の図 (右) より，DG 法の流速は CG 法に比べ理論解と良い一致を示している．

4. おわりに

本論文では，DG 法による浅水長波流れ解析の検討を行い，以下の結論を得た．

- 孤立波伝播問題において，本手法の解析結果は CG 法に比べて減衰が小さいことが確認できた．また，Slope Limiter 処理手法の導入により，オーバーシュートとアンダーシュート現象が抑えられた．
- ダムブレイク問題において，本手法は CG 法に比べて理論解と良い一致を示していることが確認できた．

今後の課題としては，高次補間を行うことと 2 次元解析を行うことが挙げられる．

参考文献

- 1) 凌国明, 松本純一, 不室太希, 檜山和男: 安定化有限要素法に基づく 2 次元・3 次元ハイブリッド津波解析モデルの構築, 第 18 回応用力学シンポジウム, 100046, 2015.
- 2) Lai, W. and Khan, A.A.: Discontinuous Galerkin method for 1D shallow water in nonrectangular and nonprismatic channels, *J. Hydraul. Eng.*, **138**, pp. 285-296, 2012.
- 3) Bunya, S., Kubatko, E.J., Westerink, J.J. and Dawson, C.: A wetting and drying treatment for the Runge-Kutta discontinuous Galerkin solution to the shallow water equations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **198**, pp. 1548-1562, 2009.
- 4) Takase, S., Kashiyama, K., Tanaka, S. and Tezduyar, T.E.: Space-time SUPG formulation of the shallow-water equation, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, **64**, pp. 1379-1394, 2010.