

制御理論を用いた橋梁上を走行する移動荷重の重量推定

東京都市大学 学生会員 ○鈴木 健吾
 東京都市大学 正会員 丸山 収
 東京都市大学 正会員 関屋 英彦
 東京都市大学 正会員 小西 拓洋
 東京都市大学 正会員 三木 千壽

1. 研究背景

橋梁を車両が通行すると、交通荷重という外乱によって振動が発生する。交通荷重は、交通量や車両重量などの特性を持っており、橋梁の疲労損傷を進行させる原因の一つである。外乱である交通荷重の特性を把握することは、橋梁の維持管理において極めて重要である。本研究は、1自由度移動荷重-梁系において、梁の応答を観測データとして、移動荷重の梁に対する荷重効果を同定する手法の基礎的な検討をしている。

2. 移動荷重および梁の振動方程式

本研究では、車輪と質量 m の車体との間にばねと減衰装置を挿入した単純な 1 自由度振動系として走行荷重をモデル化している。この荷重が梁上を通過するとき、移動荷重と梁との連成振動として取り扱う。

1 自由度移動荷重の鉛直変位を $u(t)$ とし、梁の n 次振動モードによる任意点 z_1 での動的たわみを $y_n(z_1, t)$ とすると、移動荷重の振動方程式は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} & \ddot{u}(t) + 2\beta\omega\dot{u}(t) + \omega^2 u(t) \\ &= \sum_n \left[\dot{y}_n(z_1, t) \left\{ 2\beta\omega \frac{\phi_n(vt)}{\phi_n(z_1)} \right\} \right. \\ & \quad \left. + y_n(z_1, t) \left\{ 2\beta\omega \frac{\dot{\phi}_n(vt)}{\phi_n(z_1)} + \omega^2 \frac{\phi_n(vt)}{\phi_n(z_1)} \right\} \right] \\ & + 2\beta\omega\dot{\gamma}(vt) + \omega^2 \gamma(vt) \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 β : 移動荷重の減衰定数、 ω : 移動荷重の固有円振動数(rad/sec)、 $\phi_n(\cdot)$: 梁の n 次振動モード、 l : スパン長(m)、 v : 走行速度(m/sec)、 $\gamma(\cdot)$ 表面凹凸(cm)である。なお、単純梁の場合には、 $\phi_n(x) = \sin(n\pi x/l)$ である。

また、任意点 z_1 での梁の動的たわみを $y(z_1, t)$ とすると、 n 次振動モードに対する梁の振動方程式は次式で与えられる。

$$y(z_1, t) = \sum_n y_n(z_1, t) \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \ddot{y}_n(z_1, t) + 2\beta'_n \omega'_n \dot{y}_n(z_1, t) + \omega_n'^2 y_n(z_1, t) = d_n(z_1, t) \\ & d_n(z_1, t) = \frac{1}{M} m_v (g - \ddot{u}(t)) \phi_n(vt) \phi_n(z_1) \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、 β'_n : 梁の n 次振動モードの減衰定数、 ω'_n : 梁の n 次振動モードの固有円振動数(rad/sec)、 m_v : 移動荷重の質量、 M : 梁の有効質量($M = \rho l/2g$)、 ρ : 梁の単位長さ当たり重量である。

3. 制御理論に基づいた方程式の設定

移動荷重による荷重効果を推定する際に、梁の応答は 1 次振動が卓越するものと仮定して、梁に 1 次振動まで考慮し、観測データは梁の 3 次振動まで考慮した。

荷重効果を推定するために $x_1(t) = y_1(x_1, t)$ および $x_2(t) = \dot{y}_1(x_1, t)$ と状態空間表示を行い、状態ベクトルを $\mathbf{X}(t) = [x_1(t), x_2(t)]^T$ 、 $\mathbf{d}(t) = [d_1(z_1, t)]$ とすると、移動荷重および梁についての振動方程式より、次の状態方程式を得る。

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \Phi(t) \mathbf{X}(t) + \Gamma(t) \mathbf{d}(t) \quad (4)$$

式(4)の左辺 $\dot{\mathbf{X}}(t)$ は状態ベクトルの時間微分を表している。 $\Phi(t)$ および $\Gamma(t)$ は係数行列である。

一方で、観測方程式を次式で与える。

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{X}(t) + \mathbf{V}(t) \quad (5)$$

ここで、 \mathbf{C} : 観測量の係数行列 (対角成分のみ 1.0 で、その他の成分はすべて 0)、 $\mathbf{V}(t)$: 観測ノイズである。ここでは、梁の任意点 z_1 における変位応答、速度応答が観測されるものとしている。

4. 同定問題の定式化

式(4)において、荷重効果の時間関数 $\mathbf{d}(t)$ を精度よく同定するための定式化を行う。

$$\mathbf{L}(\mathbf{X}(t), \mathbf{d}(t)) = (\mathbf{Y}(t) - \mathbf{C}\mathbf{X}(t))^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{Y}(t) - \mathbf{C}\mathbf{X}(t)) + \mathbf{d}(t)^T \mathbf{W} \mathbf{d}(t) \quad (6)$$

ここで、 \mathbf{R} : 重み行列、 \mathbf{W} : スカラー量の重みである。式(6)において、第1項は観測値 $\mathbf{Y}(t)$ と推定応答 $\mathbf{C}\mathbf{X}(t)$ の誤差を、第2項は荷重効果を評価する項である。これは、時刻 t における2次形式の評価関数である。

この式(6)に、状態方程式である式(4)より与えられる拘束条件を考慮して、時間方向の積分値を最小とする問題を考える。

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \{ \mathbf{L}(\mathbf{X}(\tau), \mathbf{d}(\tau)) + \lambda^T(\tau) (\mathbf{\Phi}(\tau) \mathbf{X}(\tau) + \mathbf{\Gamma}(\tau) \mathbf{d}(\tau) - \dot{\mathbf{X}}(\tau)) \} d\tau \rightarrow \min. \quad (7)$$

ここで、 t_0 : 初期時刻、 t_f : 終端時刻、 $\lambda(\tau)$: Lagrange の未定乗数である。式(7)は制約条件付き最小化問題であり、ここから荷重効果の時間関数 $\mathbf{d}(t)$ は以下のよう
に得られる。

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{X}(t) + \mathbf{G} \mathbf{d}(t) \quad (8)$$

$$\mathbf{d}(t) = \frac{1}{2} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{G}^T \lambda(t) \quad (9)$$

式(3)の外力項と式(9)より、梁の有効質量: M 、振動モード形: φ_1 および荷重速度: v を既知とすれば、連成効果を含んだ荷重外力は $m_v(g - \ddot{u}(t))\varphi_1(vt)\varphi_1(z_1)$ として、また車両重量は $m_v(g - \ddot{u}(t))$ として表される。

5. 試算

断面が均一な単純梁を対象として、表-1に示す緒言を用いた観測データの作成を行った。単純梁の左方から荷重が走行してくるとして、梁の左方から $z_1=12(\text{m})$ における変位応答および速度応答を観測データとした。観測データは梁の3次振動成分まで考慮して作成した。図-1は変位応答、図-2は速度応答を示している。これらの観測データをもとに、梁の有効質量: M 、振動モード形: φ_n および荷重速度: v を既知として、連成効果を含んだ荷重外力 $m_v(g - \ddot{u}(t))$ を示したものが図-3である。この図より、推定値は時刻の進行に伴って振動しながら減少していることがわかる。ここでは、 $m_v g$ を $m_v(g - \ddot{u}(t))$ として算出しているために、走行荷重の加速度の影響を受けていることになる。近似値であるが、推定値は正解値と良い対応を示しているといえる。

表-1 主要緒言

単純梁[スパン長: 60(m)]					
β'_1	$\omega'_1(\text{rad/sec})$	β'_2	$\omega'_2(\text{rad/sec})$	β'_3	$\omega'_3(\text{rad/sec})$
0.04213	10.689	0.01053	42.758	0.00468	96.205
1自由度系走行荷重					
β	$\omega(\text{rad/sec})$	$m_v(t)$	$V(\text{m/sec})$		
0.03	16.0	13.6	12.0		

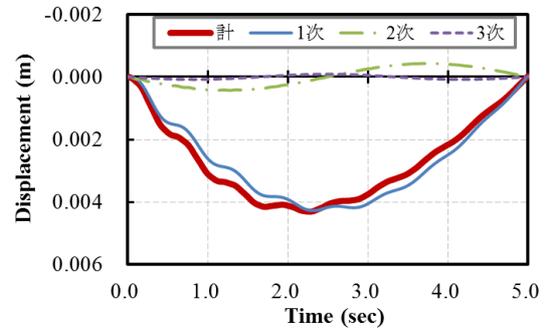


図-1 梁の変位応答 $y(z_1, t)$

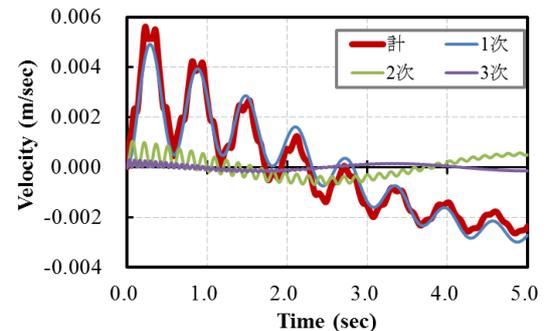


図-2 梁の速度応答 $\dot{y}(z_1, t)$

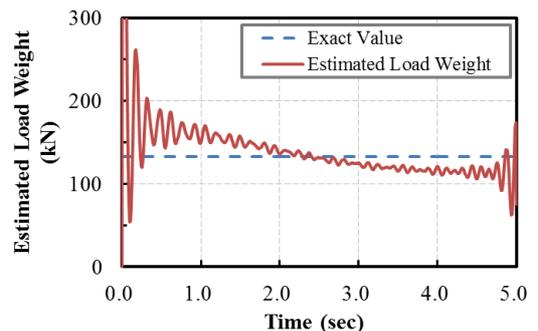


図-3 荷重外力の推定値 $m_v(g - \ddot{u}(t))$

6. 今後の展望

今後は加速度計で観測データが得られた場合および実橋梁における検討を考えている。

参考文献

- 丸山 収: 走行荷重およびはりの応答データを用いたはり表面粗さの推定, 第57回理論応用力学講演会, 第57回理論応用力学講演会講演論文集, pp.283-284, 2008/06.
- 丸山 収, 齊藤悦郎, 星谷勝: 移動荷重-はり系の動特性推定, 土木学会論文集 第368号/I-5, pp283-292, 1986.