

クロススペクトル比を用いたモード減衰定数の推定法に関する一考察

東京工業大学 正会員 ○盛川 仁・満永 仁志・飯山 かほり

1. はじめに 構造物の動特性を知ることが構造物の健全性などの評価において重要である。動特性の同定するにあたっては、異なる2ヶ所のフーリエスペクトル比を用いる単純な方法をはじめとして、種々の手法が提案されてきた(たとえば、[1-3]など)。これらの手法に共通する制約として、入力についてなんらかの仮定をおくか、あるいは特定しなければならない、という点があげられる。特に、構造物と地盤の相互作用が考えられる場合や、風や地盤震動の影響を同時にうけるような場合には、入力に関する情報の精度が動特性の同定結果に大きな誤差をもたらす可能性がある。

このような問題を解決するために Morikawa and Hamasaki [4] はクロススペクトル比を用いたモード同定法を提案している。この手法では応答のクロススペクトル同士の比を取ったクロススペクトル比を用いることで入力に関する情報を用いることなくモード固有振動数および固有モードを高精度に同定することができる。しかし、モード減衰定数の同定については言及されていない。本研究では、クロススペクトル比を用いて入力の影響を受けることなくモード減衰定数を同定する手法について検討する。

2. モード減衰定数の推定のための理論構築 モード減衰定数を同定するにあたって、1方向(水平方向)にのみ振動する多質点系モデルを仮定する。モデルの減衰には粘性比例減衰を仮定し、モード座標系への変換時に非連成化可能な形で運動方程式を表す。モデルの運動方程式をモード座標系へ変換して得られる周波数応答関数と、質点ごとに観測された出力に対するクロススペクトルの理論式との関係から、モード減衰定数を陽な形で表す推定法を導出する。

系に地動入力のみがある場合、地動に対する質点の応答を表す周波数応答関数は次式で表される [5]。

$$H_{i0}(\omega) = \sum_{s=1}^N \left\{ \frac{(-\omega^2 + \omega_s^2)u_{si}\beta_s}{(\omega^2 - \omega_s^2)^2 + 4h_s^2\omega^2\omega_s^2} - j \frac{2h_s\omega\omega_s u_{si}\beta_s}{(\omega^2 - \omega_s^2)^2 + 4h_s^2\omega^2\omega_s^2} \right\} \quad (1)$$

ここで、 ω_s , h_s , u_{si} , β_s はそれぞれモード固有振動数、モード減衰定数、固有モード、刺激係数である。また、 $j = \sqrt{-1}$, i は質点番号で p, q, r 点、添字の 0 は地表面の点、 s はモード次数、 N は最大モード次数を表わす。

任意の2質点(p, r 点)で観測された応答同士のクロススペクトルは、

$$S_{pr}(\omega) = \sum_{i=0,p,q,r} \sum_{j=0,p,q,r} H_{pi}(\omega) H_{rj}^*(\omega) \langle X_i X_j^* \rangle \quad (2)$$

と表わされる。ここで、 $S_{pr}(\omega)$ はクロススペクトル、 X_p , X_q は入力のフーリエ変換、 $\langle \cdot \rangle$ は期待値演算、 $*$ は複素共役を表わす。

ある建築物内の異なる階層の3点(p, q, r 点)で同時観測を行ったとき、 $R_{pq}(\omega) \equiv S_{pr}(\omega)/S_{qr}(\omega)$ をクロススペクトル比 $R_{pq}(\omega)$ と定義する [4]。ここで、系に地動入力のみがある場合を考える。このとき、クロススペクトル比は以下のような簡単な式で表すことができる。

$$R_{pq}(\omega) = \frac{H_{p0}(\omega)}{H_{q0}(\omega)} \quad (3)$$

このように、入力が地表のみである場合には、クロススペクトル比は2質点の周波数応答関数の比となる。

クロススペクトル比に含まれるモード特性の影響を明確にするため、(1)式において

$$\begin{aligned} (-\omega^2 + \omega_s^2) &\rightarrow \Delta\omega_s, & 2h_s\omega\omega_s &\rightarrow d_s, & u_{si}\beta_s &\rightarrow \alpha_{si}, \\ (\omega^2 - \omega_s^2)^2 + 4h_s^2\omega^2\omega_s^2 &\rightarrow \Delta\omega_s^2 + d_s^2 \end{aligned} \quad (4)$$

なる置き換えののち、(3)式に(1)式を代入し、 $R_{pq}(\omega)$ の実部と虚部を求め、

$$\begin{aligned} \Re[R_{pq}(\omega)] &= \left\{ \frac{\alpha_{1p}\alpha_{1q}}{\Delta\omega_1^2 + d_1^2} + \frac{\alpha_{2p}\alpha_{2q}}{\Delta\omega_2^2 + d_2^2} + \frac{\alpha_{3p}\alpha_{3q}}{\Delta\omega_3^2 + d_3^2} + \frac{(\alpha_{1p}\alpha_{2q} + \alpha_{2p}\alpha_{1q})(\Delta\omega_1\Delta\omega_2 + d_1d_2)}{(\Delta\omega_1^2 + d_1^2)(\Delta\omega_2^2 + d_2^2)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\alpha_{2p}\alpha_{3q} + \alpha_{3p}\alpha_{2q})(\Delta\omega_2\Delta\omega_3 + d_2d_3)}{(\Delta\omega_2^2 + d_2^2)(\Delta\omega_3^2 + d_3^2)} + \frac{(\alpha_{1p}\alpha_{3q} + \alpha_{3p}\alpha_{1q})(\Delta\omega_1\Delta\omega_3 + d_1d_3)}{(\Delta\omega_1^2 + d_1^2)(\Delta\omega_3^2 + d_3^2)} \right\} \\ &\quad / \left\{ \frac{\alpha_{1q}^2}{\Delta\omega_1^2 + d_1^2} + \frac{\alpha_{2q}^2}{\Delta\omega_2^2 + d_2^2} + \frac{\alpha_{3q}^2}{\Delta\omega_3^2 + d_3^2} + \frac{2\alpha_{1q}\alpha_{2q}(\Delta\omega_1\Delta\omega_2 + d_1d_2)}{(\Delta\omega_1^2 + d_1^2)(\Delta\omega_2^2 + d_2^2)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\alpha_{2q}\alpha_{3q}(\Delta\omega_2\Delta\omega_3 + d_2d_3)}{(\Delta\omega_2^2 + d_2^2)(\Delta\omega_3^2 + d_3^2)} + \frac{2\alpha_{1q}\alpha_{3q}(\Delta\omega_1\Delta\omega_3 + d_1d_3)}{(\Delta\omega_1^2 + d_1^2)(\Delta\omega_3^2 + d_3^2)} \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \Im[R_{pq}(\omega)] &= \left\{ \frac{(\alpha_{1p}\alpha_{2q} - \alpha_{2p}\alpha_{1q})(\Delta\omega_1d_2 - \Delta\omega_2d_1)}{(\Delta\omega_1^2 + d_1^2)(\Delta\omega_2^2 + d_2^2)} + \frac{(\alpha_{2p}\alpha_{3q} - \alpha_{3p}\alpha_{2q})(\Delta\omega_2d_3 - \Delta\omega_3d_2)}{(\Delta\omega_2^2 + d_2^2)(\Delta\omega_3^2 + d_3^2)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\alpha_{1p}\alpha_{3q} - \alpha_{3p}\alpha_{1q})(\Delta\omega_1d_3 - \Delta\omega_3d_1)}{(\Delta\omega_1^2 + d_1^2)(\Delta\omega_3^2 + d_3^2)} \right\} \\ &\quad / \left\{ \frac{\alpha_{1q}^2}{\Delta\omega_1^2 + d_1^2} + \frac{\alpha_{2q}^2}{\Delta\omega_2^2 + d_2^2} + \frac{\alpha_{3q}^2}{\Delta\omega_3^2 + d_3^2} + \frac{2\alpha_{1q}\alpha_{2q}(\Delta\omega_1\Delta\omega_2 + d_1d_2)}{(\Delta\omega_1^2 + d_1^2)(\Delta\omega_2^2 + d_2^2)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\alpha_{2q}\alpha_{3q}(\Delta\omega_2\Delta\omega_3 + d_2d_3)}{(\Delta\omega_2^2 + d_2^2)(\Delta\omega_3^2 + d_3^2)} + \frac{2\alpha_{1q}\alpha_{3q}(\Delta\omega_1\Delta\omega_3 + d_1d_3)}{(\Delta\omega_1^2 + d_1^2)(\Delta\omega_3^2 + d_3^2)} \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

を得る。ここで、 $\Re[\cdot]$, $\Im[\cdot]$ はそれぞれ実部、虚部を表わす。上式の分子に着目すると、(5)式は h_s の関数である d_s を -2 乗のオーダーで含み、(6)式は -3 乗のオーダーで含んでいる。したがって h_s が1よりも十分小さい場合、モード減衰定数はクロススペクトル比の虚部に対してより大きな感度を持つことがわかる。そこで(6)式からモード減衰定数を求める。

さらに、理論展開を容易にするために、次に示す3つの仮定を導入する。

1. モード減衰定数は1よりも十分小さいものと仮定し、 h の2乗項を0で近似する。すなわち、 $h_s h_t \approx 0$ ($s, t =$

キーワード：モード減衰定数、クロススペクトル、クロススペクトル比、常時微動、構造同定、構造ヘルスマニタリング

連絡先：〒226-8502 横浜市緑区長津田町 4259-G3-7, 東京工業大学 環境・社会理工学院 土木・環境工学系

電話：045-924-5607, Fax: 045-924-5601

1, 2, 3)。

2. モードごとの固有振動数付近のみに着目する。すなわち, $\omega \approx \omega_s$ 。

3. 各階層の質量は全て等しいと仮定する。すなわち,

$$\beta_s (s = 1, 2, 3) = \frac{\{u_{si}\}^T [M] \{1\}}{\{u_{si}\}^T [M] \{u_{si}\}} = \frac{\sum_{i=1}^n u_{si}}{\sum_{i=1}^n u_{si}^2} \quad (7)$$

ここで $\{u\}$ はモードベクトル, $[M]$ は質量マトリックス, $\{1\}$ は単位ベクトル, n は最大自由度数である。

以上を用いて (4) 式の置き換えを元に戻すと (5) 式は,

$$Re(R_{pq}(\omega_1)) = \frac{u_{sp}}{u_{sq}} \quad (8)$$

となり, クロススペクトル比の実部から固有モードが得られる [4]。(8) 式より 3 箇所以上の同時観測を全質点で実施することで, 全体の固有モードを得られる。

一方, (6) 式から, モード減衰定数 h_1 について代数的に容易に解くことができ,

$$h_1 = \frac{\Im[R_{pq}(\omega_1)]}{2\omega_1^2} \left\{ \beta_1(\omega_1^2 - \omega_2^2)(\omega_1^2 - \omega_3^2)u_{1q}^2 \right\} \quad (9)$$

$$/ \left\{ \beta_2(\omega_1^2 - \omega_3^2)(u_{1p}u_{2q} - u_{2p}u_{1q}) + \beta_3(\omega_1^2 - \omega_2^2)(u_{1p}u_{3q} - u_{3p}u_{1q}) \right\}$$

を得る。(9) 式より, クロススペクトル比に適当な近似を導入することによりモード減衰定数を陽な形で, かつ異なるモードの減衰定数の影響を受けない形で求めることができる。3 次モードまでのモード減衰定数も同様にしてモードごとの固有振動数に着目し式を変形することで得られる。モード減衰定数はクロススペクトル比の虚部, モード固有振動数, 固有モードの関数となっており, これら 3 つのパラメータは応答記録のみを用いて求められる。

建築物の動特性を同定するための手順は, 次のように整理される。

- 応答のパワースペクトルを取り, そのピーク振動数からモード固有振動数を求め,
- モード固有振動数位置でのクロススペクトル比の実部と虚部をそれぞれ計算し,
- (8) 式により実部から固有モードを求め,
- これらの値を (9) 式に代入してモード減衰定数を得る。

3. 数値シミュレーションによる精度検証 3, 5, 8 自由度系モデルの場合について, 数値シミュレーションによって (9) 式によるモード減衰定数の推定精度について確認する。質点系のパラメータについては, 理論構築に際して仮定した条件が反映されるように理想的な値とした。すなわち, モデルの質量は全て等しく, モード減衰定数は十分小さい値 ($h = 1\%$) とした。また, 質点系への地動入力とは 3 種類の震動を与えた。

3 つのモデルに対し, 3 種類の入力を与えた場合の結果を Table 1 ~ 3 に示す。なお, 3 箇所以上の同時観測を n 自由度系モデルの全点で行ったとき, クロススペクトル比 $R_{pq}(\omega)$ は $(n^2 - n)$ 通り求められ, (9) 式も各モードごとに同数のパターンが存在する。このとき, クロススペクトル比の組み合わせによりモード減衰定数の比をとる推定精度が

Table 1: 推定モード減衰定数 (3DOF)

モード次数 s		1	2	3
モード固有振動数 ω_s (Hz)	理論値	3.54	9.92	14.34
モード減衰定数 h_s (%)	理論値	1.00	1.00	1.00
	インパルス	0.98 (R_{12})	1.00 (R_{32})	1.03 (R_{21})
	ホワイトノイズ	0.82 (R_{12})	1.00 (R_{12})	1.06 (R_{23})
	地震波	0.82 (R_{32})	0.97 (R_{21})	1.84 (R_{12})

Table 2: 推定モード減衰定数 (5DOF)

モード次数 s		1	2	3
モード固有振動数 ω_s (Hz)	理論値	2.27	6.61	10.42
モード減衰定数 h_s (%)	理論値	1.00	1.00	1.00
	インパルス	0.98 (R_{25})	1.00 (R_{25})	1.00 (R_{45})
	ホワイトノイズ	1.01 (R_{15})	1.02 (R_{34})	0.99 (R_{53})
	地震波	0.94 (R_{52})	0.97 (R_{35})	1.71 (R_{14})

Table 3: 推定モード減衰定数 (8DOF)

モード次数 s		1	2	3
モード固有振動数 ω_s (Hz)	理論値	1.47	4.36	7.09
モード減衰定数 h_s (%)	理論値	1.00	1.00	1.00
	インパルス	1.01 (R_{47})	0.99 (R_{42})	1.00 (R_{41})
	ホワイトノイズ	1.00 (R_{46})	1.01 (R_{51})	1.01 (R_{48})
	地震波	1.00 (R_{42})	0.98 (R_{83})	1.02 (R_{78})

左右されることが判明したが, 表には最も理論値に近いものを掲載し, カッコ内には選択したクロススペクトル比を示している。

地動入力としてインパルスを用いた場合, モデルによらず良好な結果が得られた。3, 5 自由度系の 1 次モード減衰定数についてはやや推定精度が落ちるが, 誤差は 3% 程度にとどまっている。ホワイトノイズを入力した場合も同様に推定精度を示しているが, 地震動を入力した場合は 3, 5 自由度系の 3 次モードの推定精度は悪い。

(3) 式からわかるとおり, クロススペクトル比は周波数応答関数の比であり入力特性に依存しない。したがって理論通りであれば入力に関わらず推定結果は一致すべきだが, 数値計算の結果をみるかぎり, 入力によって異なる結果が得られている。これは, モード固有振動数の同定精度が影響しているものと考えている。また, 地震動の場合, 3, 5 自由度系では 3 次モードが励起されていないことが原因であると考えられる。

4. まとめ 本研究ではクロススペクトル比を用いてモード減衰定数を陽な形で求める方法を理論的に誘導した。数値解析により理論の検証を行った結果, 応答が励起されればモード減衰定数を正しく推定できることが明らかになった。今後は $R_{pq}(\omega)$ の p, q の組み合わせによる推定結果の変化の要因について明らかにして, 最適な組み合わせを決定するための理論的背景を明確にすることが必要であると考えている。

参考文献

- [1] Vandiver, J.K., et al., *J. of Mechanical Design*, Vol.104, pp.307-313.
- [2] Erdal, Safak., *J. of Structural Engineering*, Vol.117, pp.3064-3085, 1991.
- [3] Brincker, R., Zhang, L. and Andersen, P., *Smart Materials and Structures*, Vol.10, No.3, 2001.
- [4] Morikawa, H. and Hamasaki, S., 土木学会 第 69 回 年次学術講演会 講演概要集, I-046, pp.91-92, 2014.
- [5] 安田仁彦: モード解析と動的設計, コロナ社, 1993.