

飽和多孔質弾性体の高周波数域の波動問題に対する有限要素解析

○東京工業大学 学生会員 藤本隼史
東京工業大学 正会員 古川 陽
東京工業大学 正会員 廣瀬壮一

1. はじめに

物理探査において岩盤を解析するとき、岩盤は固体のみで構成された弾性体として扱われることが多い。しかし実際は、地中の岩盤は多孔質構造を有する岩石と間隙流体によって構成される。したがって、地中の岩盤をより厳密に解析するためには、固体と流体の相互作用を考慮する必要がある。

Biot はこれを考慮した飽和多孔質弾性体の力学モデルを提案しており¹⁾²⁾、周波数に依存して間隙流体の流動が異なるものとして、低周波数域および高周波数域それぞれで理論を展開している。Biot のモデルを用いて波動解析を行った例は数多く存在するが、低周波数域における理論のみを用いたものがほとんどである。

そこで、本研究では高周波数域の Biot 理論を用いた飽和多孔質弾性体に対する波動解析のための有限要素法を開発し、より高い周波数を用いた探査への応用を試みる。高周波数域に対応させることで、超音波を用いた岩石の材料物性の計測などへの応用が期待できる。

2. Biot 理論に基づく飽和多孔質弾性体の基礎式

はじめに、Biot 理論に基づく飽和多孔質弾性体の力学モデルについて説明する。このモデルは固体骨格部と間隙流体から構成されており、これらの相互作用を考慮している。また、固体表面は非浸透性であり、間隙は一様に分布していると仮定する。なお、本研究では、固体骨格部の力学的性質および間隙流体の透水性を等方性とする。以下に Biot 理論の基礎式を示すが、特に断りのない限り、下付き添字は総和規約に従う。

このモデルに対する構成方程式は、次式で表される。

$$\sigma_{ij} = A_{ijkl}u_{k,l} + \alpha\delta_{ij}Mw_{k,k} + s_{ij} \quad (1)$$

$$p = -\alpha Mu_{k,k} - Mw_{k,k} + q \quad (2)$$

ここで、 $(\cdot)_{,i}$ は x_i に関する微分、 σ_{ij} および p はそれぞれ全応力および流体圧力、 u_i および w_i はそれぞれ固体変位および固体骨格に対する流体の相対変位を表す。また、 δ_{ij} は Kronecker のデルタを表し、 s_{ij} および q はそれぞれ固体および流体に作用する外力である。さらに、 M は Biot の弾性係数、 α は Biot の有効応力定数、 A_{ijkl} は非排水条件での弾性テンソルである。

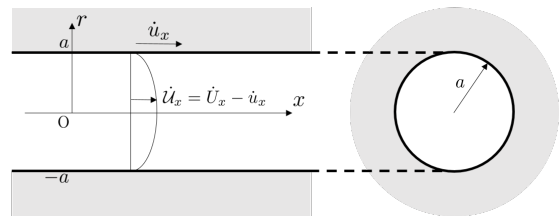


図1 円管内における流体の流れ

次に、周波数領域における運動方程式を以下に示す。

$$\tilde{\sigma}_{ij,j} = \rho(-i\omega)^2\tilde{u}_i + \rho_f(-i\omega)^2\tilde{w}_i \quad (3)$$

$$\tilde{p}_{,i} = -\rho_f(-i\omega)^2\tilde{u}_i - \tilde{\mathcal{Y}}(-i\omega)^2\tilde{w}_i \quad (4)$$

ここで、 $(\tilde{\cdot})$ は時間 t に関する Fourier 変換、 i および ω はそれぞれ虚数単位および角周波数を表す。また、 ρ および ρ_f はそれぞれ飽和多孔質弾性体の平均密度および間隙流体の密度である。さらに、 $\tilde{\mathcal{Y}}$ は間隙流体による散逸効果を表す関数であり、対象とする周波数 f に応じて適切に選択する必要がある。関数 $\tilde{\mathcal{Y}}$ の選択には、次式で表される特性周波数 f_c を用いる。

$$f_c = \frac{b}{2\pi m} \quad (5)$$

ここで、 b および m はそれぞれ摩擦係数および質量係数である。 $f < f_c$ を満たす低周波数域では、間隙流体の流動は Darcy 則に従い、関数 $\tilde{\mathcal{Y}}$ は以下に示す関数 $\tilde{\mathcal{Y}}^L$ を用いる。

$$\tilde{\mathcal{Y}}^L(\omega) = m + \frac{\eta}{k(-i\omega)} \quad (6)$$

ここで、 η および k はそれぞれ間隙流体の粘性および Darcy 則に基づく浸透率を表す。一方、 $f \geq f_c$ を満たす高周波数域では、Darcy 則は破綻し、関数 $\tilde{\mathcal{Y}}$ は次の式で表される関数 $\tilde{\mathcal{Y}}^H$ を用いる。

$$\tilde{\mathcal{Y}}^H(\omega) = \rho_f \frac{1}{1 - \frac{2 J_1(\kappa)}{\kappa J_0(\kappa)}} \quad (7)$$

ここで、 $J_n(z)$ は n 次の第1種 Bessel 関数を表す。なお、式(7)に示す関数 $\tilde{\mathcal{Y}}^H$ は、図1に示すような円管内における流体の流れを考えている。このとき、式(7)に含まれる κ は、円管の半径を a として、次の関係式を満たす。

$$\kappa = \sqrt{\frac{i\omega\rho_f}{\eta}}a \quad (8)$$

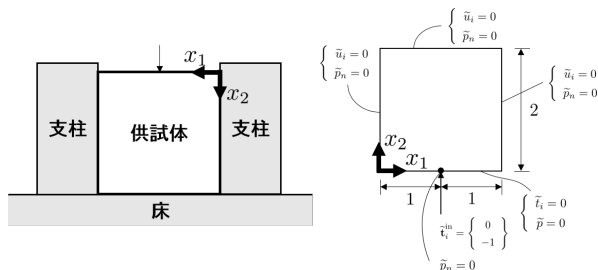
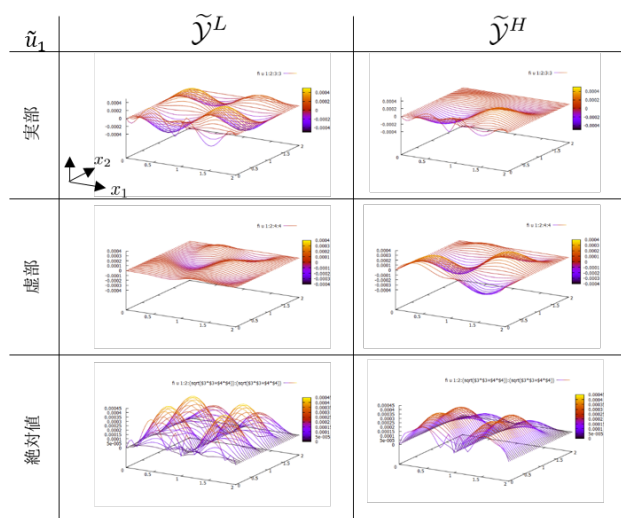


図2 供試体を模した解析モデル

表1 材料定数

α	β	λ	μ	M	ρ	ρ_f
1	0.2	1	1	1	1	0.333

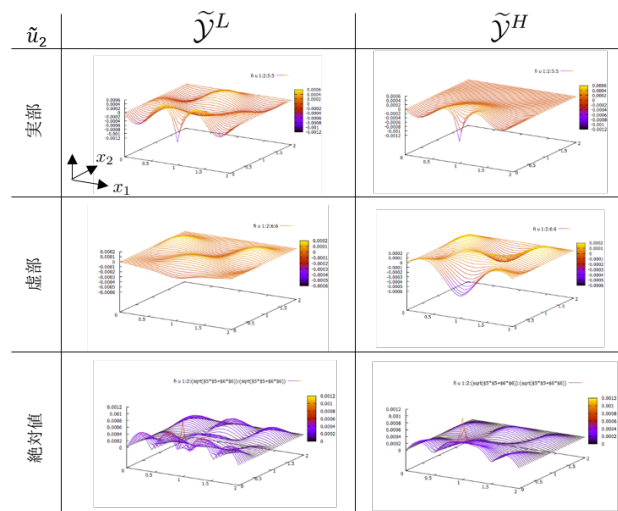
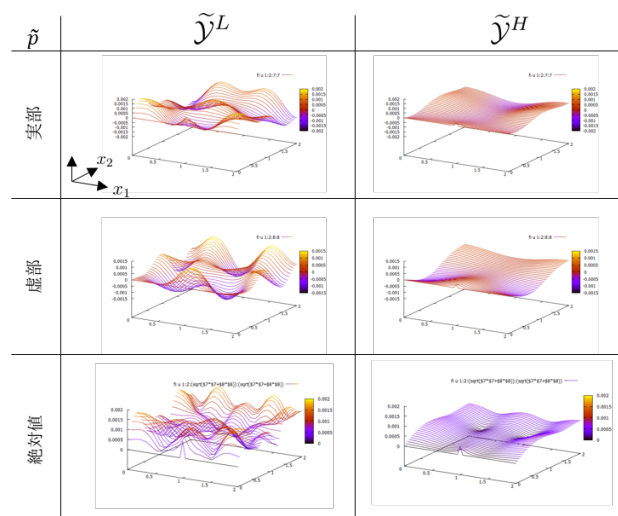
図3 関数 $\tilde{y}$ の違いによる波動場の比較 (固体変位 $\tilde{u}_1$)

3. 数値解析例

次に、有限要素法を用いて、高い周波数 ($f \geq f_c$) に対する波動解析を実施する。ここでは、同じ周波数に対して関数 $\tilde{y}^L$ および $\tilde{y}^H$ を用いた結果を示し、両者を比較する。

解析対象として、図2に示すような正方形の供試体を模した2次元モデルを考える。このモデルは一辺の長さを2とし、その3辺を非浸透性の床および支柱で完全に固定し、自由な1辺の中心に表面力を与える。このとき境界条件は、固定された場所において固体変位および間隙流体の流出量をゼロ ($\tilde{u}_i = 0, \tilde{p}_n = 0$) とする。また、自由表面では、表面力および流体圧力はゼロ ($\tilde{t}_i = 0, \tilde{p} = 0$) とする。表面力を加える点 $\{x_1, x_2\} = \{1, 0\}$ には x_2 軸方向に周波数領域における表面力 $\{\tilde{t}_1, \tilde{t}_2\} = \{0, -1\}$ を与え、流体の流出量はゼロ ($\tilde{p}_n = 0$) とする。なお、材料定数は表1に示すものを用いる。周波数は高周波数域になるように特性周波数の10倍 ($f/f_c = 10$) に設定する。

図3から図5に、関数 $\tilde{y}^L$ および $\tilde{y}^H$ を用いて計算した $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{p}$ の波動場の実部、虚部、絶対値を示す。それぞれの結果の比較から、固体変位および流体圧力の波動場の絶対値は、関数 $\tilde{y}^L$ を用いた方が総じて値が大きいことがわかる。Biot理論の適用条件を考慮すれば、高周波数域に対

図4 関数 $\tilde{y}$ の違いによる波動場の比較 (固体変位 $\tilde{u}_2$)図5 関数 $\tilde{y}$ の違いによる波動場の比較 (流体圧力 $\tilde{p}$)

応した関数 $\tilde{y}^H$ を用いた方が適切であると考えられる。そのため、高周波数域の解析を低周波数域の理論によって代用すると誤った結果が得られる可能性があり、取り扱う問題によって関数 $\tilde{y}$ を適切に選択する必要がある。

4. おわりに

本稿では、まず、Biot理論に基づく飽和多孔質弾性体の力学モデルについて、低周波数域および高周波数域の理論を示した。その後、有限要素解析の結果から関数 $\tilde{y}$ によって解析結果に差が現れることを確認した。以上より、飽和多孔質弾性体中の波動解析では、解析を行う周波数に対応するように関数 $\tilde{y}$ を適切に選択する必要があることがわかった。なお、本研究では等方性材料かつ2次元問題を取り扱ったが、今後はより現実的な条件を考え、異方性飽和多孔質弾性体や3次元問題への拡張を予定している。

参考文献

- 1) M.A. Biot: Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range, *J Acoust Soc Am*, Vol.28, No.2, pp.168-178, 1956.
- 2) M.A. Biot: Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. Higher frequency range, *J Acoust Soc Am*, Vol.28, No.2, pp.179-191, 1956.