多層版内部に作用する変位と応力の影響線について

(株) 井 沢 設 計	正会員	○廣瀬　清泰	三 井 住 友 建 設(株)	フェロー会員	三上　　浩
大成ロテック(株)	正会員	太田　正義	ファイベックス（株）	正会員	井之上賢一
(株)セーフティアイランド	正会員	鍋島　益弘	大阪工業大学名誉教授	正会員	堀川都志雄

１．はしがき

著者らは 3 次元弾性体の変位関数をもとに，級数タイプの解で示される変位法や応力法を誘導し，①層界面で剥離域が存在する場合，②自由辺を有する場合，および③層最下面が剛域で支持される場合などの多層版問題に取り組んできた [1),2),3)]．しかしこれらはいずれも荷重位置が固定された状態であり，路面を走行する自動車荷重を担う実橋床版への適用には難がある．

本研究では移動荷重による影響線の作成を目標に，多層版内の任意層に発生する変位や応力を算出できるように，厳密解を導く調和解析法と剥離現象等を含む任意点の挙動が抽出できる選点法からなる併用法を改造する．また既存の多層版解析プログラム(EXCEL 版)の改良による影響線の作図と，実橋への適用を図るために輪荷重の載荷面積で集約した擬似影響線の誘導を試みる．

２．変位関数の基礎式と級数表示

2 つの変位関数 f_3 と θ_3 の基礎式を式(1)に示す．

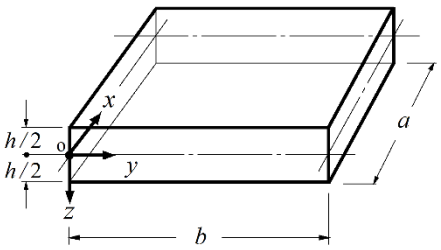
$$\Delta\Delta f_3 = 0 \ , \quad \Delta\ \theta_3 = 0 \tag{1}$$

ここで，Δ：3 次元ラプラシアン

式(1)より，全周単純支持版での変位関数の級数展開が得られる(**図－1**)．

$$f_3 = \sum\sum[\mathrm{C}_1\,\mathrm{ch}\gamma z + \mathrm{C}_2\,\mathrm{sh}\gamma z + \mathrm{C}_3\,\gamma z\,\mathrm{ch}\gamma z + \mathrm{C}_4\,\gamma z\,\mathrm{sh}\gamma z\,]\,\sin\alpha_m x \sin\beta_n y \ ,$$

$$\theta_3 = \sum\sum[\,\mathrm{C}_5\,\mathrm{ch}\gamma z + \mathrm{C}_6\,\mathrm{sh}\gamma z\,]\,\cos\alpha_m x \cos\beta_n y \tag{2}$$



図－1　各層の座標および形状

ここで，$\gamma^2 = \alpha_m^2 + \beta_n^2$，$\mathrm{ch}\gamma z = \cosh\gamma z$ ，$\mathrm{sh}\gamma z = \sinh\gamma z$

$\alpha_m = m\pi/a$ (m = 1 , 2 , 3 , ･･･) ，$\beta_n = n\pi/b$ (n = 1 , 2 , 3 ･･･)

変位 u, v, w と変位関数との関係式を以下に示す．

$$2\mu u = -\partial_x\partial_z f_3 + \partial_y\theta_3 \ , \ 2\mu v = -\partial_y\partial_z f_3 - \partial_x\theta_3 \ ,$$

$$2\mu w = \mu/(\lambda+\mu)[\partial_z^2 + (\lambda+2\mu)(\partial_x^2+\partial_y^2)/\mu]f_3 \tag{3}$$

３．影響線の作成

x 方向を k_x，y 方向を k_y 個からなる選点法の分割ブロック($k = k_x \times k_y$)に作用する未知の伝達力ベクトル **X**, **Y**, **Z** の応力法による解は次式から得られる．

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \\ \mathbf{Z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \mathbf{F} \quad \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{P} \end{Bmatrix} \tag{4}$$

ここで，$\mathbf{X} = (\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_i, \ldots, \mathrm{X}_k)$，$\mathbf{Y} = (\mathrm{Y}_1, \mathrm{Y}_2, \ldots, \mathrm{Y}_i, \ldots, \mathrm{Y}_k)$，$\mathbf{Z} = (\mathrm{Z}_1, \mathrm{Z}_2, \ldots, \mathrm{Z}_i, \ldots, \mathrm{Z}_k)$ $(i = 1, k)$，

F：選点法の採用界面よりも上側の上層部と下側の下層部による柔性マトリックス，

$\mathbf{P} = (\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots, \mathrm{P}_i, \ldots, \mathrm{P}_k)$ $(i = 1, k)$：荷重ベクトル

分割ブロック j での伝達力 $\mathrm{X}_j, \mathrm{Y}_j, \mathrm{Z}_j$ $(j = 1, k)$の影響線は，式(4)の逆行列 $\mathbf{F}^{-1}$の第 j 行，第(j+k)行，第(j+2k)行をそれぞれ読取り，荷重の移動に伴って変動する荷重項 **P**との積により順次求められる．着目する界面の上層部と下層部の層割りや層厚を調整することで，任意界面での伝達力が得られる．

キーワード　影響線，多層版解析，調和解析法，併用法，選点法

連絡先　〒581-0019　大阪府八尾市南小阪合町 5-8-30　株式会社 井沢設計 TEL072-998-2723　FAX072-998-2768

変位法についても同様の操作により，任意界面での変位の影響線が求められる．

４．影響線の検証

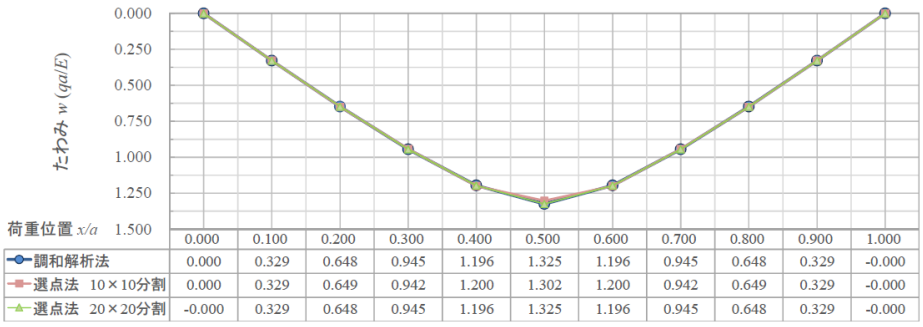
全周単純支持正方形版(全厚 h/a=0.1）を均等に 4 層割りした多層版を例に，版の中央線上(y/a=0.5)を荷重が移動する場合の影響線を考える（**図－2**）．版の弾性係数を E，ポアソン比 ν を 0.3 とする．なおここでは集中荷重 P を微小要素内(0.01a×0.01a)に一様分布する荷重として扱う．

版最下面の中央点(x/a=0.5)と任意点(x/a=0.3)の位置での a)本方法と b)調和解析法による結果を**表－1** に示す．

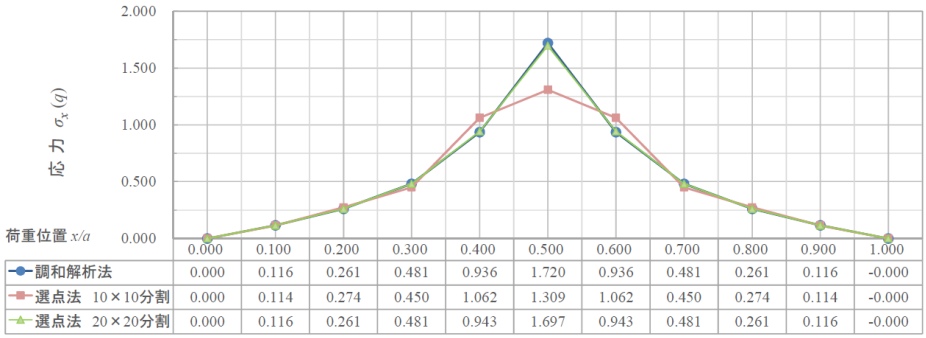
表－1　方法 a)と b)による比較（y/a=0.5）

座　　標	x/a=0.3			x/a=0.5		
項　　目	a) 本方法		b)調和解析法	a) 本方法		b)調和解析法
分　割　数	10×10	20×20	——	10×10	20×20	——
たわみ(P/Ea)	94.86	95.21	95.21	130.9	134.9	135.6
応力 σ_x (P/a^2)	43.37	47.47	47.42	128.9	181.6	204.9
応力 σ_y (P/a^2)	71.12	75.37	75.48	128.9	181.6	204.9

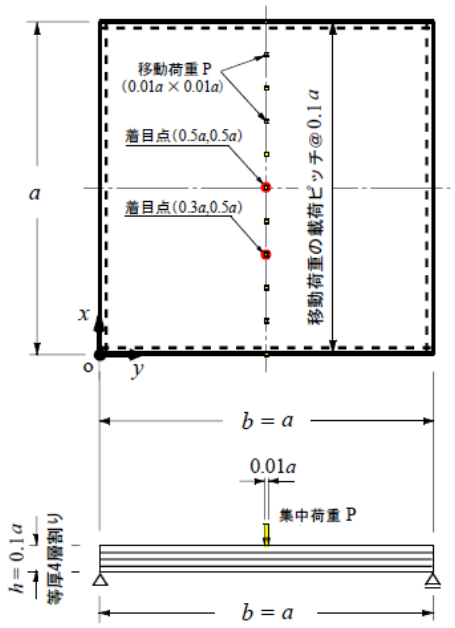
集中荷重を 0.1a×0.1a の領域での積分操作により，部分荷重 q 下での擬似影響線が得られる．版最下面の中央点（x/a=0.5 , y/a=0.5 ）での結果を**図－3a, 3b** に示す．



図－3a たわみ w (qa/E) の中央線上(y/a=0.5)での影響線



図－3b 応力 σ_x (q) の中央線上(y/a=0.5)での影響線



図－2　計算モデル

５．あとがき

10×10 の分割数では集中荷重の表現が緩慢であることが判る．実橋床版での例は当日発表する予定である．

参考文献

1) 三上，高島，廣瀬，堀川：調和解析法と選点法からなる併用法による多層版の数値解析，土木学会構造工学論文集，Vol.60A,pp.1134-1139,2014.

2) 廣瀬，鍋島，堀川：剥離域を有する張出し多層版の併用法による数値解析，土木学会構造工学論文集，Vol.62A, pp.1135-1140,2016.

3) 三上，井之上，水野，河野，廣瀬，堀川：変位法の剛支持領域をもつ多層版への適用，土木学会構造工学論文集，Vol.62A, pp.1141-1148,2016.