

地震動位相の微分可能性について

港湾空港技術研究所 正会員 ○野津 厚

1. はじめに 地震動のフーリエ位相スペクトル(以下, 地震動位相とよぶ)を円振動数で微分したものは群遅延時間と呼ばれ, 地震動の経時特性と関係を有する¹⁾⁻³⁾. 波形合成の際にこの関係を利用し, 適切な群遅延時間を与えることにより, 適切な経時特性を有する波形を合成しようとする研究が過去に数多く行われてきている⁴⁾⁵⁾. また, その成果は実用的な設計入力地震動の策定にも応用されるに至っている⁶⁾⁷⁾.

しかしながら, 地震動位相および群遅延時間の統計的性質についてはいまだに未解明な点が残されており, 継続的な研究が行われている. 特に, 最近, 地震動位相がフラクタル的性質を有するとの立場から, 一連の精力的な研究が行われている⁸⁾⁻¹²⁾. この一連の研究の中で, 地震動位相は円振動数に対していたるところ微分不可能であり, 地震動位相の円振動数に関する1階微分である群遅延時間は定義できないとの新たな考えが示されている¹²⁾. このことが正しいとすれば, 地震動位相の微分としての群遅延時間という概念に依拠してきた既往研究¹⁾⁻⁵⁾の根拠が揺らぐことになり, その実務への応用にも疑問符が付くこととなってしまう.

そこで, 本稿においては, 地震動位相の微分可能性に関する理論的考察を行う.

2. 地震動のフーリエ変換の微分可能性 まず, 地震動位相の定義に立ち返り, 地震動のフーリエ変換の微分可能性について確認する. ここでは地震動の時刻歴波形 $f(t)$ として, 限定された時間区間 $[0, T]$ のみで値を持ち, その外側ではゼロであるものを考える. また地震動のフーリエ変換と逆変換は次式で定義する.

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad (1)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad (2)$$

ここに ω は円振動数である. 式(1)を ω で形式的に微分すると

$$\frac{dF(\omega)}{d\omega} = -i \int_{-\infty}^{\infty} t f(t)e^{-i\omega t} dt \quad (3)$$

となるので, $F(\omega)$ の ω に関する微分が存在するかどうかという問題は, 関数 $tf(t)$ のフーリエ変換が存在するかという問題に帰着するが, ここでは $f(t)$ は時間区間 $[0, T]$ のみで値を持つ関数としているので, $tf(t)$ も同じ時間区間のみで値を持つ関数となり, フーリエ変換可能な関数の条件¹³⁾である

$$\int_{-\infty}^{\infty} |tf(t)|^2 dt < \infty \quad (4)$$

を満たしているので, 関数 $tf(t)$ のフーリエ変換は存在する. よって $F(\omega)$ は ω に関して微分可能である.

3. 地震動位相の微分可能性 地震動のフーリエ振幅 $A(\omega)$ および位相 $\theta(\omega)$ とフーリエ変換との関係は次式で与えられる.

$$F(\omega) = A(\omega)e^{-i\theta(\omega)} \quad (5)$$

ここで位相は文献 2) に倣い複素平面上で時計回りを正している.

先に述べたように, $F(\omega)$ は ω に関して微分可能であり, ω を変化させたとき $F(\omega)$ は複素平面上を滑らかに動く. それにも関わらず, $F(\omega)$ から計算される位相 $\theta(\omega)$ が微分不可能となることがあるとすれば, それはどのような場合であろうか.

原理的には, 図-1 に示すように, 二つの場合が考えられる. 一つは, 図-1 (a) に示すように, 例えば地震動位相を $(-\pi, \pi)$ の範囲で定義していて, ω の増加と共に $F(\omega)$ が複素平面上の第3象限から第2象限に移動する場合であり, このとき地震動位相に 2π の不連続が生じ, 地震動位相は微分不可能となる. もう一つは, 図-1 (b) に示すように, ω の増加と共に $F(\omega)$ が複素平面上の原点を横切る場合であり, このとき地震動位相には π の不連続が生じ, 地震動位相は微分不可能となる. また, $F(\omega)$ がちょうど原点上を通過しない場合でも, 原点付近を通過する場合は, たとえ ω の変化に対する $F(\omega)$ の変化がなめらかであっても, 位相が急激に変化し, 群遅延時間の差分近似である $\Delta\theta/\Delta\omega$ が数値的に不安定となることがあり得る.

キーワード 地震動, 位相, 群遅延時間, 微分可能性, 複素平面

連絡先 〒239-0826 神奈川県横須賀市長瀬 3-1-1 港湾空港技術研究所 Tel:046-844-5058

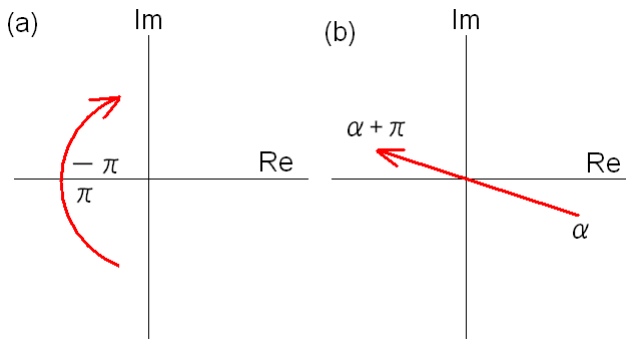


図-1 位相が微分不可能となる原理
(矢印は複素平面上での $F(\omega)$ の動きを示す)

このうち前者すなわちアンラップ操作における問題点については、佐藤⁸⁾¹⁰⁾¹²⁾により巧妙な解決方法が提案されている。すなわち、 $F(\omega)$ の実部を R 、虚部を I としたとき、位相差分を

$$\Delta\theta(\omega) = - \frac{R\Delta I - I\Delta R}{R^2 + I^2} \quad (6)$$

で求める方法である(右辺の負号は位相を時計回りに定義したことによる)。この場合、 ω に対して位相は連続的に変化するので、第2象限と第3象限の境界での位相の不連続は生じない。しかしながら、 $F(\omega)$ が原点付近を通過する場合の問題については、この方法でも解決ができない。

式(6)の両辺を $\Delta\omega$ で除し $\Delta\omega \rightarrow 0$ の極限をとれば

$$\frac{d\theta(\omega)}{d\omega} = - \frac{R(dI/d\omega) - I(dR/d\omega)}{R^2 + I^2} \quad (7)$$

が得られる。右辺の $dR/d\omega$ と $dI/d\omega$ については上で微分可能であることを確認したので、右辺の分母 ($F(\omega)$ の自乗であることに注意) がゼロとなる場合を除けば、位相 $\theta(\omega)$ が微分可能であることが確認できる。従って、位相差分を式(6)で定める場合、位相 $\theta(\omega)$ が微分不可能となるのは、 $F(\omega)$ が複素平面上の原点を通過する場合であり、またその場合に限られることがわかる。

また、数値計算上は、 $F(\omega)$ がちょうど原点を通過しなくても、原点に著しく接近するとき、式(6)の右辺の分母が極めて小さい値となるので、位相差分および群遅延時間の数値計算結果が不安定となることが考えられる。実際に2001年芸予地震の際に広島港で観測された波形(NS成分)に対して群遅延時間の差分近似 $\Delta\theta/\Delta\omega$ を計算してみると(FFTのサイズは $2^{18}=262144$ とした)、図-2の上段に示すように、ところどころで著しく絶対値の大きい値が出現した。これは文献8)や文献

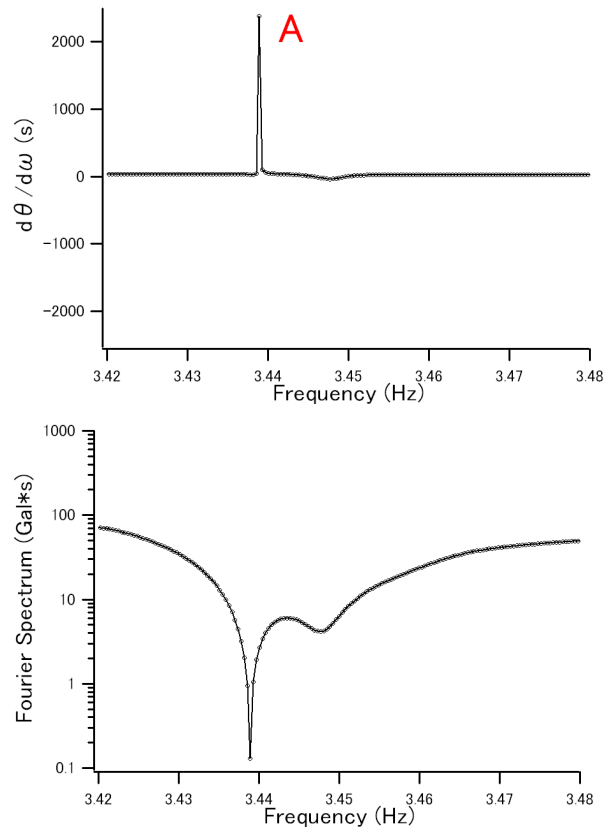


図-2 広島港の波形に対し群遅延時間を差分近似 $\Delta\theta/\Delta\omega$ で計算した結果(上)とフーリエ振幅スペクトル(下)

10)における位相差分の数値計算例と同様の傾向である。そして、群遅延時間の差分近似の絶対値が著しく大きい値を示している周波数においては、フーリエ振幅スペクトル(図-2の下段)は極小値を示している。

4. まとめ 地震動のフーリエ変換 $F(\omega)$ は ω に関して微分可能であるにも関わらず、 $F(\omega)$ から計算される位相 $\theta(\omega)$ は、アンラップ操作による不連続以外にも、 ω の増加と共に $F(\omega)$ が複素平面上の原点を通過するとき微分不可能となる。数値計算上は、 $F(\omega)$ がちょうど原点上を通過しない場合でも、複素平面上で $F(\omega)$ が原点に接近するとき、位相差分および群遅延時間の数値計算結果は不安定となる。

参考文献 1)和泉正哲, 勝倉裕(1983), 日本建築学会構造系論文集, 第327号, pp.20-26. 2)理論地震動研究会編(1994), 鹿島出版会. 3)L. コーエン(吉川昭・佐藤俊輔訳)(1998), 朝倉書店. 4)佐藤智美, 植竹富一, 菅原良次(1997), 日本建築学会構造系論文集, 第493号, pp.31-39. 5)佐藤忠信, 室野剛隆, 西村昭彦(2000), 土木学会論文集 No.640/I-50, pp.119-130. 6)鉄道総合技術研究所編(2012), 丸善出版. 7)大川出, 他10名(2010), 建築研究所資料, No.127. 8)佐藤忠信(2014), 土木学会論文集 A1, Vol.70, No.2, pp.295-305. 9)佐藤忠信(2014), 土木学会論文集 A1, Vol.70, No.3, pp.463-473. 10)佐藤忠信, 吉田郁政, 大島義信(2014), 土木学会論文集 A1, Vol.70, No.4, pp.1273-1284. 11)佐藤忠信(2015), 土木学会論文集 A1, Vol.71, No.4, pp.1014-1017. 12)佐藤忠信(2015), 第35回地震工学研究発表会, 土木学会. 13)蓬田清(2007), 共立出版, pp.141-162.