時間領域境界要素法を援用した異方性板内部の欠陥に対する順解析および逆解析

群馬大学大学院理工学府 学生会員 ○稲垣祐生
群馬大学大学院理工学府 学生会員 下田瑞斗
群馬大学大学院理工学府 正会員 斎藤隆泰

1. はじめに

近年, 炭素繊維強化プラスチック (CFRP : Carbon Fiber Reinforced Plastics) 等の異方性板を土木, 機械, 建築, 航空宇宙等の様々な分野に応用する研究が行われている. しかしながら, 例えば CFRP に, 超音波非破壊評価法の適用を考えた場合, 異方性が超音波の伝搬や散乱に大きく影響することから, 探傷精度が著しく低下する可能性が指摘されている. 一方, CFRP のような板内部の欠陥を探傷する場合, 超音波の送受信点は, 板上部および下部の限られた点にしか設置できない. したがって, 精度の良い超音波非破壊評価法を行うためには, 限られた送受信点で, 異方性の影響を受けた散乱波形データによる逆解析の解析精度を検討する必要がある. そこで本研究では, CFRP のような異方性板内部の欠陥に対する順解析, および逆解析手法を開発する. 以下では, 異方性純面外弾性波動問題の基礎式, および逆解析について概説し, 数値解析結果を示すことで本手法の妥当性を確認する.

2. 解くべき問題と異方性純面外弾性波動問題の基礎式

解くべき問題として, 図 1 に示すような板下面を自由境界とした異方性板内部の空洞による超音波の散乱問題 (順解析), およびその結果を用いた, 欠陥形状再構成問題 (逆解析) を考える. なお, 本解析では, 簡単のため, 2 次元異方性純面外弾性波動問題のみを扱う. 異方性板内部の位置 $\boldsymbol{x}$, 時刻 t における異方性弾性波動場の変位 $u_i(\boldsymbol{x},t)$ は, それぞれ次の運動方程式, および構成則を満たす.

$$\sigma_{3\alpha,\alpha}(\boldsymbol{x},t) - \rho\ddot{u}_3(\boldsymbol{x},t) = f_3 \qquad (1)$$
$$\sigma_{3,\alpha}(\boldsymbol{x},t) = C_{3\alpha3\beta}u_{3,\beta}(\boldsymbol{x},t) \qquad (2)$$

ここで, $\sigma_{ij}(\boldsymbol{x},t)$ は応力, ρ は異方性弾性体の密度, f_i は物体力, C_{ijkl} は弾性定数, $(\ )_{,i}$ は $\partial/\partial x_i$, $(\dot{\ })$ は時間微分を表す. なお, 以下では特に断りの無い限り, 右下添え字 i 等のローマ文字は 1, 2, 3 の値をとり, 右下添え字 α 等のギリシャ文字は 1, 2 の値を取るものとする. また, 簡単のため, 物体力 f_i を無視する.

3. 順解析による超音波シミュレーション

まず, 順解析によって異方性板内部の欠陥からの散乱波を求める. 本研究では, 演算子積分時間領域境界要素法 (CQ-BEM) を用いて, 空洞欠陥に対する純面外弾性波動散乱解析を行う. 定式化の詳細については, 例えば, 文献 [1] 等を参照されたい. 2 次元異方性純面外弾性波動散乱問題に対する境界積分方程式は次の式で表される.

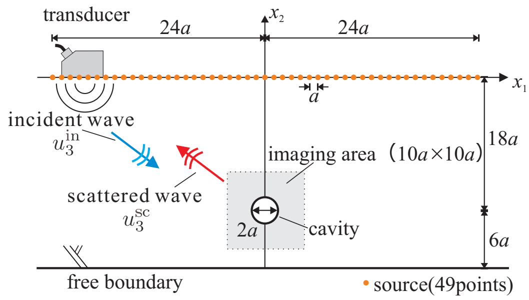

図 1 解析モデル

$$C_{33}(\boldsymbol{x})u_3(\boldsymbol{x},t) = u_3^{\rm in}(\boldsymbol{x},t) + \int_S U_{33}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t) * t_3(\boldsymbol{x},t)dS_y - \int_S T_{33}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t) * u_3(\boldsymbol{x},t)dS_y \qquad (3)$$

ここで, $C_{33}(\boldsymbol{x})$ は自由項 [2], $t_3(\boldsymbol{x},t)$ は面外変位 $u_3(\boldsymbol{x},t)$ に対応する表面力, $*$ は畳込み積分を表す. また, $u_3^{\rm in}(\boldsymbol{x},t)$ は入射波, $U_{33}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)$, $T_{33}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)$ は 2 次元異方性純面外弾性波動問題に対する時間領域基本解, および対応する二重層核を表す. 式 (3) の時間領域境界積分方程式を解くために, 空間に関しては空洞境界 S を境界要素に分割した区分一定要素, 時間に関しては Lubich の演算子積分法 [3] を用いて離散化することで, 全時間ステップにおける境界未知量, および異方性板内部の面外弾性波動場 $u_3(\boldsymbol{x},t)$ を求めることができる.

4. 逆解析による欠陥形状再構成

次に, 演算子積分時間領域境界要素法を用いた順解析により得られた散乱波形データを使って逆解析を行う. 周波数領域散乱波 $u_3^{\rm sc}(\boldsymbol{x},\omega)$ に対する境界積分方程式は次のように表せる.

$$u_3^{\rm sc}(\boldsymbol{x},\omega) = -\int_S T_{33}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\omega)u_3(\boldsymbol{y},\omega)dS_y \qquad (4)$$

ここで, ω は角周波数, $T_{33}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\omega)$ は周波数領域における 2 次元異方性純面外弾性波動問題に対する二重層核である. 二重層核の遠方表現を式 (4) に代入し, 空洞内部 D_c でのみ

Key Words: 逆解析, 演算子積分時間領域境界要素法, 異方性板
〒 376-8515 群馬県桐生市天神町 1-5-1・TEL/FAX:0277-30-1610

値を持つ特性関数

$$\Gamma(\boldsymbol{y}) = \begin{cases} 1 & (\boldsymbol{y} \in D_c) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \tag{5}$$

を取り入れると, 式 (4) は次のようになる.

$$\begin{aligned} u_3(\boldsymbol{x},\omega) =& \frac{F(\omega)\mathrm{sgn}(\cos(\varphi^s-\psi))}{4\pi c_{66}} \frac{k_0 f(\varphi^s)}{|\boldsymbol{x}||f''(\varphi^s)|} \\ & S^5(\varphi^s) C_{3\alpha p\beta} n^s_\beta \hat{x}_\alpha \exp\big[2\mathrm{i}\{k_0|\boldsymbol{x}|f(\varphi^s) \\ & + \frac{\pi}{4}\mathrm{sgn}(f''(\varphi^s))\}\big] \\ & \int_R \Gamma(\boldsymbol{y})\exp\big[-2\mathrm{i}k_0 f(\varphi^s)\hat{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{y}\big]dV_y \end{aligned} \tag{6}$$

ここで, $\boldsymbol{K} = 2k_0 f(\varphi^s)\hat{\boldsymbol{x}}$ なる空間における Fourier 変換, 逆 Fourier 変換の関係を示すと,

$$\tilde{\Gamma}(\boldsymbol{K}) = \int_R \Gamma(\boldsymbol{y})\exp\big[-\mathrm{i}(\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{y})\big]dV_y \tag{7}$$

$$\Gamma(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{2\pi}\int_{\boldsymbol{K}} \tilde{\Gamma}(\boldsymbol{K})\exp\big[\mathrm{i}(\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{y})\big]d\boldsymbol{K} \tag{8}$$

となる. 式 (7), (8) の関係を用いることで, 式 (6) を変形し, $\Gamma(\boldsymbol{y})$ を次のように求める.

$$\begin{aligned} \Gamma(\boldsymbol{y}) =& \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{8c_{66}^2 f(\varphi^s)}{F(\omega)\mathrm{sgn}(\cos(\varphi^s-\psi))} \\ & \frac{|\boldsymbol{x}||f''(\varphi^s)|}{c_0} \frac{u^{\mathrm{sc}}(\boldsymbol{x},\omega)}{S^5(\varphi^s)\hat{Q}_{33}} \exp\Big[-2\mathrm{i}\Big\{k_0 f(\varphi^s) \\ & (|\boldsymbol{x}| - \hat{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{y}) + \frac{\pi}{4}\mathrm{sgn}(f''(\varphi^s))\Big\}\Big] d\omega d\psi \end{aligned} \tag{9}$$

ただし,

$$\hat{Q}_{33} = C_{3\alpha p\beta} n^s_\beta P_{p3}\hat{x}_\alpha \quad F(\omega) = -\frac{\sqrt{2\pi}\omega^2\exp(\mathrm{i}\omega t_s)}{2\exp(\omega^2/\omega_p^2)\omega_p^3}$$

$$f(\varphi) = S(\varphi)|\cos(\varphi-\psi)| \quad S(\varphi) = c_0/c(\varphi) \tag{10}$$

であり, sgn は符号関数, n^s_α は二重層核 $T_{33}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\omega)$ に含まれる単位円周を表す方向ベクトル, φ^s は $f'(\varphi^s) = 0$ を満たす解, P_{p3} は面外方向に対応する qS2 波の固有ベクトル, c_{66} は弾性定数 C_{ijkl} をフォークト表記で表した場合の弾性定数 $c_{ij}(i,j=1,...,6)$ の c_{66} 成分, c_0 は $c_0 = \sqrt{c_{66}/\rho}$, k_0 は $k_0 = \omega/c_0$ を示している. また, φ,ψ はそれぞれ $n^s_\alpha = (\cos\varphi, \sin\varphi)$, $\hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}/|\boldsymbol{x}| = (\cos\psi, \sin\psi)$ のように座標変換した場合の偏角を表しており, $c(\varphi)$ および, $k(\varphi)$ はそれぞれ φ 方向の qS2 波の波速および, 波数を表す. また, ω_p, t_s はそれぞれ順解析で用いる入射波 (Ricker 波) の中心周波数および, ピーク時刻である. 以上より, 式 (9) を精度良く計算することで欠陥形状を再構成することができる.

5. 数値解析例

以下, 数値解析例を示す. 図 1 において, 空洞の中心座標を $(0,-18a)$, 半径を a とする. また, 超音波の送受信点は, 板上部にのみ間隔 a 刻みで合計 49 点設けた. ただし, 超音波の送受信は同一の探触子で行うこととする. 図 2 に順解析による, 座標点 $(18a, 0)$ で得られた散乱波の時間波形を示す. このような順解析で得られた散乱波形データを逆解析に適用する. 超音波の伝搬経路として, 経路 a (直達散乱波), および経路 d (反射散乱波) に対応するエコーを散乱波形データから抜き出し, それぞれのエコーを用いた逆解析結果を図 3 に示す. 図 3 (a) は直達散乱波のみ, 図 3 (b) は反射散乱波のみを用いた欠陥形状再構成結果を示している. なお, 参考のため, 図 3 中には実際の空洞の境界を点線で示している. 図 3 (a) では直達散乱波のみを用いているため, 入射波が直接寄与する空洞上部を精度良く再構成できていることがわかる. 一方, 底面からの反射散乱波のみを用いた場合は, 図 3 (b) のように, 底面に近い空洞下部を比較的精度良く再構成できていることがわかる.

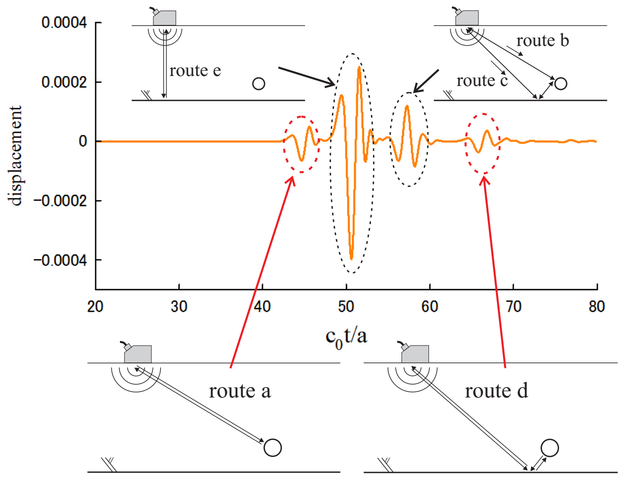

図 2 $(18a, 0)$ における散乱波の時間波形と波形ピークが辿った伝搬経路.

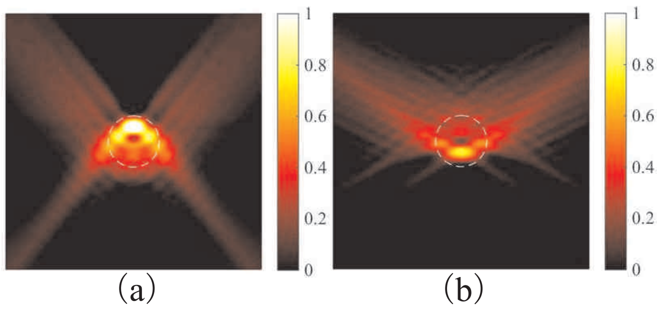

図 3 再構成結果 (a) 直達散乱波のみを用いた場合 (b) 反射散乱波のみを用いた場合.

6. まとめと今後の課題

異方性板内部の欠陥に対する順解析および欠陥形状再構成手法を開発した. 今後は, 実際の CFRP への適用や, qP 波や qS1 波を考慮した場合の逆散乱解析を行う予定である.

参考文献

1) Furukawa, A., Saitoh, T. and Hirose, S.: Convolution quadrature time-domain boundary element method for 2-D and 3-D elastodynamic analyses in general anisotropic elastic solids, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol.39, pp. 64-74, 2014.
2) 小林昭一編著：波動解析と境界要素法, 京都大学学術出版会, 2000.
3) Lubich, C. : Convolution quadrature and discretized operational calculus I, *Numer. Math.*, Vol.52, pp. 129-145, 1988.