非線形スペクトル確率有限要素法に用いるリターンマッピングアルゴリズムの基礎的検討

大成建設(株) 正会員○羽場 一基，正会員 堀田 渉，正会員 畑 明仁，正会員 渡辺 和明

１．はじめに

原子力発電所における確率論的安全評価の導入が進む中，地盤物性の不確実性の取り扱いは重要な課題となっている．このような不確実性を合理的に評価する手法として，スペクトル確率有限要素法[1)]（以下，SSFEM）が挙げられる．しかし，これまでの SSFEM に関する検討の多くが弾性（線形）であり，数少ない非線形 SSFEM の検討[2)]においても材料の降伏過程は決定論的な取り扱いがなされている．言い換えれば，現状の SSFEM では，確率論的安全評価でも重要となる材料強度の不確実性を考慮することは難しい．

本論文では，降伏過程の効率的な応力更新アルゴリズムであるリターンマッピングアルゴリズム[3)]を確率論に拡張し，非線形 SSFEM に用いる確率論的リターンマッピングアルゴリズム（以下，SSRMA）を提案する．さらに，簡単なモデルを用いた試計算を実施し，SSRMA の妥当性を確認する．

２．SSFEM の概要

SSFEM は，確率変数を Karhunen-Loeve 展開（以下，KL 展開）と Polynomial Chaos 展開（以下，PC 展開）により展開し，その展開係数を有限要素法により評価する手法である．SSFEM ではこの展開を用いることで，物性値の空間的相関と応答値の複雑な確率分布を考慮した確率過程を一度の計算で評価できる．

KL 展開は空間的相関を表現するための展開であり，入力物性値に適用する．例えば，せん断剛性率 G が正規分布を持つ場合，G は期待値 $\langle G\rangle$ と独立な正規分布確率変数 ξ（期待値 0 で分散 1）によって展開される．

$$G(x,\omega)=\langle G\rangle+\sum_i G^{(i)}(x)\xi_i(\omega) \tag{1}$$

ここで，x は空間座標，ω は標本空間の標本点であり，$G^{(i)}$は空間的相関を満たすように定義する．

一方，PC 展開は複雑な確率分布を表現するための展開であり，変位 u 等の応答値に適用する．PC 展開では，KL 展開の確率変数 ξ の Hermite 多項式を用いて展開することで，複雑な確率分布を表現することができる．

$$u(x,\omega)=\langle u\rangle+\sum_i u^{(i)}(x)\xi_i(\omega)+O(\xi^2) \tag{2}$$

Hermite 多項式の 1 次（ξ の 1 次）の展開では u は正規分布となるが，Hermite 多項式の 2 次以上の項を考慮することで正規分布以外の確率分布を表現できる．

３．確率論的リターンマッピングの提案

３．１．降伏関数の確率分布の変化

（決定論的な）リターンマッピングでは，応力を更新する際に試行ステップとして弾性予測応力 σ^{trial} を考える．もし，σ^{trial} による降伏関数 f^{trial} が $f^{\mathrm{trial}}\leq 0$ であれば，弾性状態として σ^{trial} が更新後の応力 σ として採用される．一方，$f^{\mathrm{trial}}>0$ の場合には降伏したと判断され，流れ則に基づき降伏関数 $f=0$ を満たすように応力 σ が更新される．

一方，確率論を考える場合，応力や材料強度が確率分布を持つため，降伏関数も確率分布を持つ．すると，弾性予測応力による降伏関数 f^{trial} は，図-1 の赤点線のように，確率分布の一部が $f^{\mathrm{trial}}\leq 0$ で，残りが $f^{\mathrm{trial}}>0$ となる確率分布を持つ．降伏後の降伏関数 f に対しては，$f^{\mathrm{trial}}\leq 0$ の領域は弾性でありその確率分布を保持するが，$f^{\mathrm{trial}}>0$ の領域では $f=0$ となるように応力が更新される．その結果，降伏後の降伏関数の確率分布は，図-1 の青線のように，$f=0$ でデルタ関数の形状を持つ分布となる．

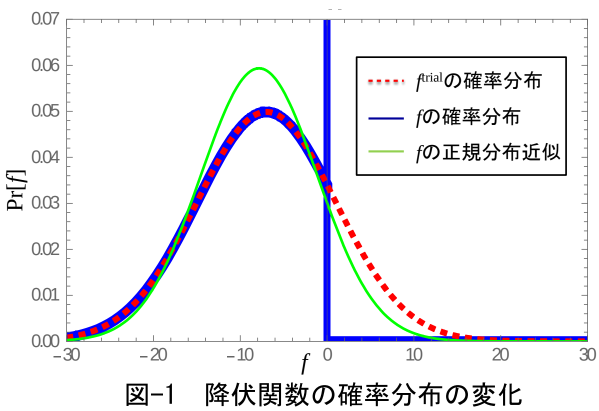

図-1 降伏関数の確率分布の変化

キーワード 確率論的リスク評価，スペクトル確率有限要素法，リターンマッピングアルゴリズム

連絡先 〒163-0606 東京都新宿区西新宿 1-25-1 大成建設(株) 原子力本部 ＴＥＬ03-5381-5315

３．２．非線形 SSFEM に用いる確率論的リターンマッピング

SSFEM では降伏関数も PC 展開されるため，SSRMA に必要なことは降伏後の降伏関数 f の確率分布を PC 展開でどのように表現するかに帰着する．ここでは，最も簡単な方法として，降伏関数を ξ の 1 次まで展開する SSRMA を提案する．これは，材料物性が正規分布の時，降伏関数も正規分布で近似することと等しい．即ち，リターンマッピングで $f=0$ となるように応力を更新する代わりに，SSRMA では降伏応力が図-1 の緑線となるように応力を更新するのである．f の確率分布から，SSRMA の降伏関数 f_s の期待値 $\langle f_s \rangle$ 及び標準偏差 SD_S は以下で与えられる．

$$\left\langle f_S \right\rangle = \int_{-\infty}^{0} f^{\mathrm{trial}} \Pr[f^{\mathrm{trial}}] df^{\mathrm{trial}}, \quad SD_S^2 \equiv \int_{-\infty}^{0} \left(f^{\mathrm{trial}}\right)^2 \Pr[f^{\mathrm{trial}}] df^{\mathrm{trial}} - \left(\int_{-\infty}^{0} f^{\mathrm{trial}} \Pr[f^{\mathrm{trial}}] df^{\mathrm{trial}}\right)^2 \tag{3}$$

ここで，$\Pr[f^{trial}]$は f^{trial} の確率密度関数 PDF である．SSRMA を SSFEM に適用する場合，降伏過程に関係する降伏関数や応力等は ξ の 1 次まで展開し，変位等は任意の次数で展開することになる．

４．試計算　応力ひずみ関係

SSRMA の基本的な妥当性を確認するため，1 次元弾完全塑性 von Mises 降伏条件における応力ひずみ関係を評価し，モンテカルロ計算(MCS)の結果と比較する．降伏関数はせん断応力 τ と降伏応力 σ_Y を用いて以下で与えられる．

$$f = \sqrt{3}|\tau| - \sigma_Y \tag{4}$$

式(4)より，決定論的な応力は降伏前はせん断剛性率×ひずみ，降伏後は降伏応力となる．計算条件を表-1 に示す．MCS の計算回数は 5000 回とした．

表-1　解析物性値

Parameter [unit]	Mean	Standard deviation
Elastic shear modulus G [MPa]	2.5	0.5
Yield stress σ_Y [MPa]	1.0×10^{-4}	1.0×10^{-5}
Strain rate $\Delta\varepsilon$[-]	1.0×10^{-7}	-

図-2 に応力ひずみ関係及び応力変動係数 Cv のひずみ依存性を示す．これらの結果から，SSRMA は MCS の結果をよく再現していることがわかる．確率論的な期待値は，応力状態の一部が降伏に達するため，決定論的な応力より早く低下しはじめ，降伏応力に連続的に変化していく．また，応力の不確定性は，決定論的な結果から予想される通り，せん断剛性率×ひずみの不確定性から降伏応力の不確定性へ連続的に移り変わっていくことがわかる．

図-3 に $\varepsilon=1.2\times10^{-5}$ での応力 PDF を示す． MCS の結果は 10^5 回の結果である．既述した通り，SSRMA の応力 PDF は正規分布となる．MCS の結果は SSRMA の結果と比べ，最頻値が応力の大きい側にあり，応力の小さい側で裾の重い分布となっている．これは，応力が小さい側はせん断剛性率×ひずみが支配的であり，応力が大きい側は降伏応力が支配的となるためである．SSRMA で図-1 の青線のような不連続な降伏関数を正規分布で近似することは，弾性域の応力と降伏応力の混在の仕方を近似し，図-3 の赤線のような分布を正規分布で近似することに対応する．

これらの結果から，SSRMA を用いることで平均的な降伏過程とその不確定性を表現できると考えられる．

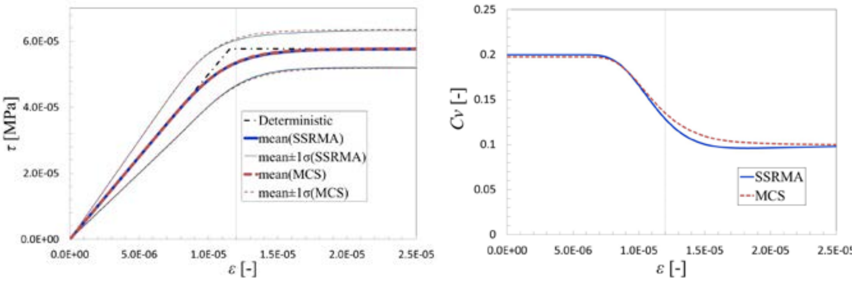

図-2　応力ひずみ関係，応力変動係数 C_v のひずみ依存性

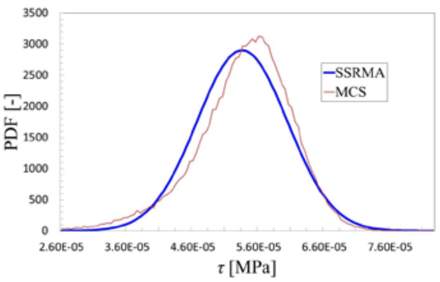

図-3　応力 PDF の比較($\varepsilon=1.2\times10^{-5}$)

５．まとめ

本論文では，SSFEM に用いる SSRMA を提案し，試計算によりその基本的な妥当性を確認した．提案した SSRMA は降伏関数を正規分布で近似する簡単なものであるが，平均的な降伏過程とその不確定性を表現できると考えられる．今後は，より複雑なモデルを用いて SSRMA の検証を行うとともに，SSFEM への組込みを行う予定である．

参考文献

1) R.G.Ghanem, P.D.Spanos: Stochastic Finite Elements -A Spectral Approach-, Dover Publications, Inc., 1991.
2) Anders, Maciej, and Muneo Hori. "Stochastic finite element method for elasto-plastic body." *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 46.11 (1999): 1897-1916.
3) Simo, J. C., and Miguel Ortiz. "A unified approach to finite deformation elastoplastic analysis based on the use of hyperelastic constitutive equations."*Computer methods in applied mechanics and engineering* 49.2 (1985): 221-245.