ゴムのエネルギ吸収性能を再現するための超弾性−粘弾塑性ダメージモデル

山梨大学　正会員　○　吉田　純司

1. はじめに

ゴムは，車のタイヤをはじめとして，ダンパーや積層ゴム支承などの構造物の免震・耐震装置，エンジンマウント等の防振材，コンピュータ等の部品の衝撃吸収剤など，様々な工業用途に広く応用されている．これらの製品は，ゴムの柔軟性やエネルギ吸収性能を積極的に用いているため，その性能は，主材料であるゴムの力学特性に大きく依存する．ゴムは，耐久性や耐候性の向上を目的として加硫時にカーボンやシリカなどの添加剤を付加しているため，その応力-ひずみ関係は，エネルギ吸収性能を示す（履歴ループを描く）ようになり，かつ応力進展方向やループ形状は，過去に経験した最大変形量（Mullins 効果），ひずみレベル，載荷振動数などに依存するようになる．

本研究では，ゴムが示すこのような複雑な力学特性を再現するためのゴム材料の構成モデルを構築する．

2. ひずみ依存性を含む粘弾塑性モデル

(1)　粘弾塑性モデルの自由エネルギ

本研究では, ゴムのエネルギ吸収性能を表すために, 等容変形に関して，図-1 に示すような非弾性モデルを用いる．ただし，ひずみに依存するエネルギ吸収性能を再現するために，モデルの等容変形に関する自由エネルギを，弾性部での自由エネルギ $\bar{\psi}(\boldsymbol{H}^{(e)})$ と，無次元のひずみの関数 $\Lambda(\boldsymbol{H})$ の積として，

$$\Psi(\boldsymbol{H},\boldsymbol{H}^{(e)})=\Lambda(\boldsymbol{H})\cdot\bar{\psi}(\boldsymbol{H}^{(e)}) \tag{1}$$

のように表す．ここに $\boldsymbol{H}$ は物質対数ひずみ（Hencky ひずみ）テンソル [1]，$\boldsymbol{H}^{(e)}$ は弾性物質対数ひずみテンソル [2]である．また $\bar{\psi}$ は線形弾性体と同一形式で

$$\bar{\psi}(\boldsymbol{H}^{(e)})=\frac{1}{2}\boldsymbol{H}^{(e)}:\mathbb{C}^{(e)}:\boldsymbol{H}^{(e)} \tag{2}$$

$$\mathbb{C}^{(e)}\equiv 2\mu\left(\mathbb{I}-\frac{1}{3}\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{I}\right) \tag{3}$$

とする．ここに $\mu\in\mathbb{R}_+$（$\mathbb{R}_+$ は実数空間 $\mathbb{R}$ の正の部分）は弾性部でのせん断弾性係数である．また，$\Lambda(\boldsymbol{H})$ は非弾性モデルにおいて $\boldsymbol{H}$ に依存して塑性曲面が拡大・縮小する割合を表す．本研究では $\Lambda(\boldsymbol{H})$ をハードニング関数(HD 関数）と呼ぶ．HD 関数の具体的な形については後述する．

(2)　非弾性部のひずみの発展方程式

次に，弾性ひずみ $\boldsymbol{H}^{(e)}$ の発展方程式は,

$$\dot{\boldsymbol{H}}-\dot{\boldsymbol{H}}^{(e)}=\left\{(1-\theta)\frac{\bar{\varepsilon}}{\lambda}+\theta(3K)^{\frac{1}{2}}\right\}\sqrt{\frac{2}{3}}(3\Omega)^{\frac{N}{2}}\boldsymbol{n} \tag{4}$$

を用いる．ただし，

$$\boldsymbol{n}:=\boldsymbol{s}/|\boldsymbol{s}|,\quad \boldsymbol{s}:=\Lambda\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\boldsymbol{H}^{(e)}},\quad \bar{\sigma}:=\Lambda\bar{\sigma}^{(0)} \tag{5}$$

$$\Omega:=\frac{1}{2\bar{\sigma}^2}|\boldsymbol{s}|^2,\quad K:=\frac{1}{2}|\dot{\boldsymbol{G}}|^2,\quad \boldsymbol{G}:=\mathrm{dev}(\boldsymbol{H}) \tag{6}$$

であり，$\theta\in[0,1]$，$\lambda\in\mathbb{R}_+$，$\bar{\sigma}^{(0)}\in\mathbb{R}_+$，$N\in\mathbb{R}_+$ は材料定数である．また，$\bar{\varepsilon}\equiv\bar{\sigma}^{(0)}/(3\mu^{(e)})$ である．

3.　ゴムの超弾性−粘弾塑性ダメージモデル

本研究では，ゴムの構成モデルとして，図-2 に示すように超弾性ダメージモデルと上述した M 個の粘弾塑性モデルを並列に組み合わせたモデルを提案し，前者により応力の進展方向を，後者によりエネルギー吸収性能（履歴ループ）を表現する．

(1)　全体の自由エネルギ

本モデルでの全自由エネルギ Φ は，各要素での自由エネルギの和として次式のように表される．

$$\Phi(\boldsymbol{C},\boldsymbol{H}_k^{(e)},d):=\Psi_0(\bar{\boldsymbol{C}},d)+\sum_{k=1}^{M}\Psi_k(\boldsymbol{H}(\boldsymbol{C}),\boldsymbol{H}_k^{(e)}) \tag{7}$$

ただし Ψ_0 は超弾性ダメージ要素での自由エネルギ，Ψ_k は k 番目 $(k=1,2,\ldots,M)$ の粘弾塑性要素での自由エネルギを表す．また，d はダメージを表すスカラの変数，$\bar{\boldsymbol{C}}$ は右 Cauchy-Green テンソル $\boldsymbol{C}$ の等容変形部分を表すテンソル，$\boldsymbol{H}_k^{(e)}$ は k 番目の粘弾塑性要素における弾性物質対数ひずみテンソルを表す．なお体積変形に関しては等方性の弾性体を仮定する．

(2)　超弾性ダメージモデル

本研究ではゴムに非圧縮を仮定し，超弾性ダメージ要素では自由エネルギ Ψ_0 に,

$$\Psi_0(\bar{\boldsymbol{C}},d)=(1-d)\cdot\bar{\psi}_0(\bar{\boldsymbol{C}}) \tag{8}$$

を用いる．$\bar{\psi}_0$ は無ダメージの状態での等容変形に関する自由エネルギを表す．具体的な $\bar{\psi}_0$ として本研究では，川端らによって提案されたモデル [3]：

$$\bar{\psi}_0=c_1(\bar{I}_1-3)+c_2(\bar{I}_2-3)+\frac{c_3}{n_0+1}(\bar{I}_1-3)^{n_0+1} \tag{9}$$

を用いる．ただし $\bar{I}_1$，$\bar{I}_2$ はそれぞれ $\bar{\boldsymbol{C}}\equiv J^{-2/3}\boldsymbol{C}$ の第 1 および第 2 不変量であり，$c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}_+$ および $n_0\in\mathbb{R}_+$ は材料定数である．

一方，ダメージ関数 d は，Ogden らの提案した次式を用いる [4]．

$$d(t):=r_0\tanh\left[\frac{\Xi(t)-\bar{\psi}_0(\bar{\boldsymbol{C}}(t))}{m_0+\beta_0\cdot\Xi(t)}\right] \tag{10}$$

ここに $\Xi(t)$ は，初期状態(時刻 0)から現時刻 t の範囲において経験した等容変形分の自由エネルギ $\bar{\psi}_0$ の最大値であり，$\Xi(t):=\max_{0\le s\le t}\bar{\psi}_0(\bar{\boldsymbol{C}}(t))$ のように表される．ただし，$r_0\in[0,1]$，$m_0\in\mathbb{R}_+$，$\beta_0\in\mathbb{R}_+$ は定数である．

(3)　非弾性部の発展方程式

k 番目 $(k=1,2,\ldots,M)$ の粘弾塑性モデルにおける弾性ひずみ $\boldsymbol{H}_k^{(e)}$ 発展方程式は，式(4)に習い，

$$\dot{\boldsymbol{H}}-\dot{\boldsymbol{H}}_k^{(e)}=\left\{(1-\theta_k)\frac{\bar{\varepsilon}_k}{\lambda_k}+\theta_k(3K)^{\frac{1}{2}}\right\}\sqrt{\frac{2}{3}}(3\Omega_k)^{\frac{N_k}{2}}\boldsymbol{n}_k \tag{11}$$

と表せる．ただし，$\theta_k\in[0,1]$，$\lambda_k\in\mathbb{R}_+$，$\bar{\sigma}_k^{(0)}\in\mathbb{R}_+$，

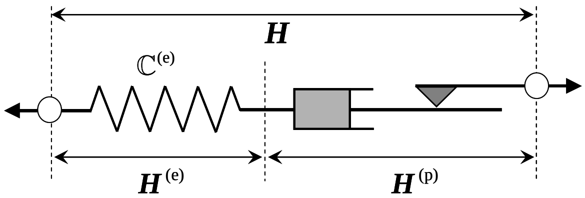


図-1　粘弾塑性モデルの概念図

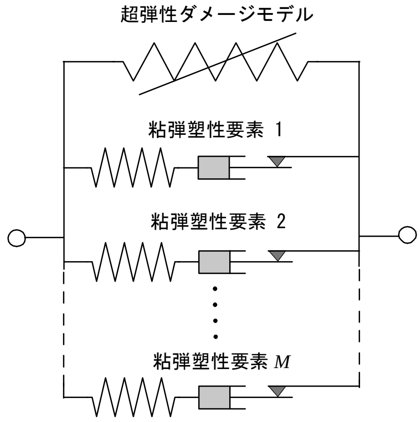
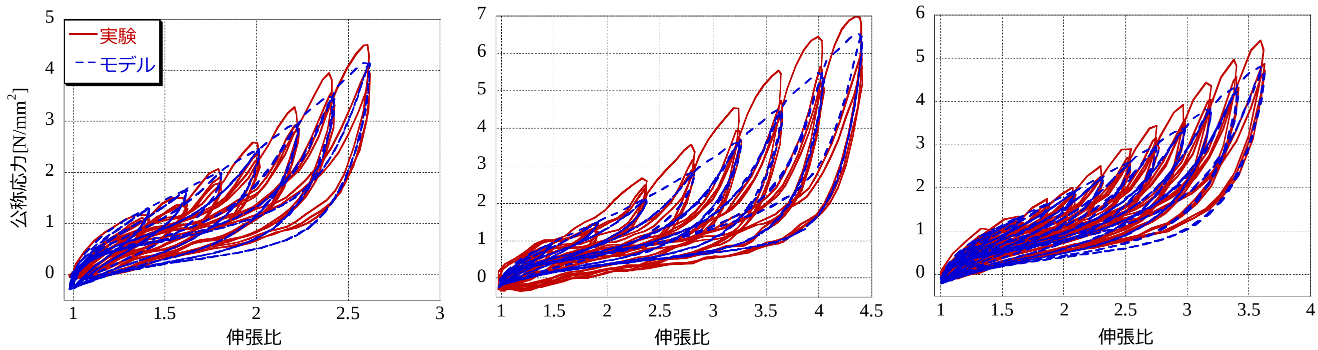
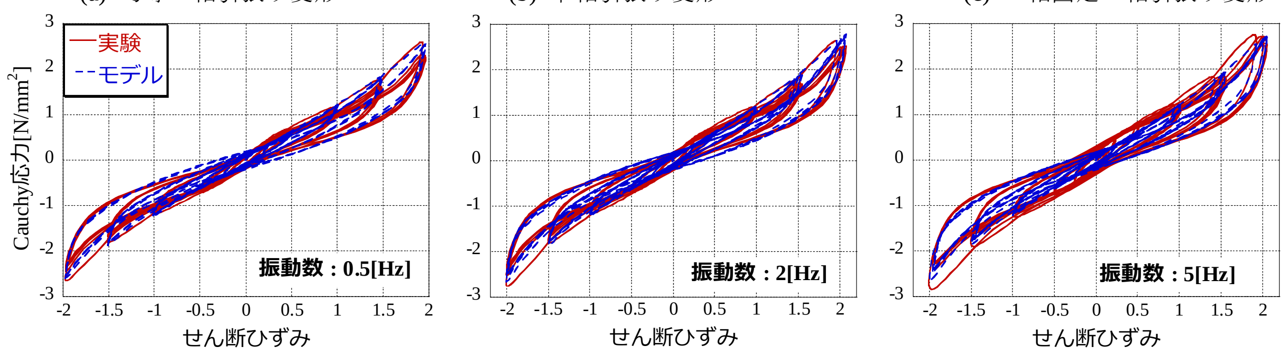


図-2　ゴムの超弾性-粘弾塑性ダメージモデル



(a) 均等二軸引張り変形　(b) 単軸引張り変形　(c) 一軸固定二軸引張り変形



(d) 単純せん断変形（0.5Hz）　(e) 単純せん断変形（2Hz）　(f) 単純せん断変形（5Hz）

図-3　各種材料試験結果とモデルによる計算結果との比較

$N_k \in \mathbb{R}_+$ は k 番目の粘弾塑性要素の材料定数である．

(4) ハードニング関数

k 番目の粘弾塑性要素での HD 関数 Λ_k として本研究では，

$$\Lambda_k(\boldsymbol{H}) \equiv 1 + \frac{e^{m_k \bar{\xi}_1} + e^{m_k \bar{\xi}_2} + e^{m_k \bar{\xi}_3} - 3}{h_k m_k} \qquad (12)$$

のような形を提案する．ただし，$(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\xi}_3)$ は $\boldsymbol{G}$ の主値を表し，$h_k \in \mathbb{R}_+$，$m_k \in \mathbb{R}_+$ は材料定数である．

(5) 材料試験結果との比較

以上の構成モデルについて，粘弾塑性要素の数を $M = 2$ とした場合に，防振用ゴムの材料試験結果 [5] との比較を行った．図-3 に各材料試験において得られた応力-ひずみ関係と，本モデルから得られる計算結果との比較を示す．図-3 をみると，各種の多軸引張り試験や動的単純せん断試験においてゴムの実挙動が比較的精度よく再現できていることがわかる．

4. まとめ

本研究では，工業用途のゴムが有するエネルギ吸収性能を再現することを目的として，超弾性-粘弾塑性ダメージモデルを提案した．本モデルにより，ここで対象とした防振ゴムについては，各種の材料試験結果を精度良く再現できることがわかった．

参考文献

1) Holzapfel, G.A.: *Nonlinear Solid Mechanics – A Continuum Approach for Engineering*, Wiley, 2000.

2) Lin, R.C. and Brocks, W.: On a finite strain viscoplastic theory based on a new internal dissipation inequality, *International Journal of Plasticity*, Vol.20, pp.1281-1311, 2006.

3) 山下義裕，川端季雄：補強ゴムのひずみエネルギー密度関数の近似式，日本ゴム協会誌，第 65 巻，第 9 号，pp.517-528，1992.

4) Ogden, R.W. and Roxburgh, D.G.: A pseudo-elastic model for the Mullins effect in filled rubber, *The Royal Society of London*, A-455, pp.2861-2877, 1999.

5) http://www.jancae.org/annex/　非線形 CAE 協会　ゴム分科会