3次元音響波動問題に対するCQ-FMBEMの時間方向の高速化について

○東京工業大学大学院 学生会員 丸山泰蔵
群馬大学大学院 正会員 斎藤隆泰
東京工業大学大学院 正会員 廣瀬壮一

1. はじめに

非定常な波動問題を取り扱う場合, 時間領域境界要素法 (TD-BEM) は解領域をそのまま取り扱うことができるため, 有効な手法であると考えられる．しかしながら, 従来の TD-BEM は時間増分が小さい場合, 数値解の安定性に問題があった．一方, 近年, 比較的安定かつ高精度な, 陰的 Runge-Kutta (IRK) 法を用いた演算子積分時間領域境界要素法 (CQ-BEM)[1] が提案され, 上記の問題は大きく改善されたと考えられる．

しかしながら, IRK 法を用いた CQ-BEM は計算コストが比較的大きく, 何らかの高速化を施さなければ大規模問題への適用が困難である．著者らのグループによって, 高速多重極法 (FMM)[2] を適用して空間方向に高速化した CQ-FMBEM[1] が開発されているものの, 時間方向に関しては, 総時間ステップ N に対して $O(N^2)$ の計算量を要している．そのため, 総時間ステップ数を増加させると計算コストが膨大になってしまうという欠点があった．

そこで, 本研究では, 過去の時間ステップにおける境界値のみが既知であるという制約の下, 畳込み積分の高速化が可能である計算アルゴリズム[3](以下では, 高速畳込み演算と呼ぶ) を用いて, CQ-FMBEM を時間方向に対して高速化する．対象とする問題は 3 次元音響波動問題とし, 要素数, 総時間ステップ数を変化させた場合の計算量を比較することによって, 本手法の有効性を示す．

2. IRK 法を用いた CQ-BEM

図 1 に示すような無限領域 D に閉じた境界 S を有する散乱体が存在する外部散乱問題を考える．図中の $\boldsymbol{n}$ は法線方向ベクトルである．このとき, 領域 D 中で圧力 p が満足する支配方程式, 及び初期条件は以下のように与えられる．

$$c^2\nabla^2 p(\boldsymbol{x},t) - \ddot{p}(\boldsymbol{x},t) = 0 \quad \boldsymbol{x} \in D \tag{1}$$

$$p(\boldsymbol{x},0) = \dot{p}(\boldsymbol{x},0) = 0 \quad \boldsymbol{x} \in S \tag{2}$$

$$p(\boldsymbol{x},0) = p^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{x},0) \quad \boldsymbol{x} \in D \tag{3}$$

ここで, p^{in} は入射波であり, c は領域中を伝搬する波動の速度である．また, $(\dot{\ })$ は時間微分を表している．

定式化の詳細は省略するが, 空間に関して区分一定要素, 時間に関して m 段の IRK 法を用いた CQM によって離散化された, 第 n ステップ, 第 i サブステップにおける境界積分方程式は次のような表現となる[1]．

$$\sum_{\alpha=1}^{M}\sum_{j=1}^{m}\left[-A_{\gamma\alpha}^{ij;0}q_{\alpha}^{j;n} + \left(\frac{1}{2}\delta_{ij}\delta_{\alpha\gamma} + B_{\gamma\alpha}^{ij;0}\right)p_{\alpha}^{j;n}\right] = p_{\gamma}^{\mathrm{in};i;n} + \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\alpha=1}^{M}\sum_{j=1}^{m}\left[A_{\gamma\alpha}^{ij;n-k}q_{\alpha}^{j;k} - B_{\gamma\alpha}^{ij;n-k}p_{\alpha}^{j;k}\right]$$
$$(i=1,...,m), \quad (n=0,...,N-1) \tag{4}$$

ここで, N は総時間ステップ数, M は要素数, δ_{ij} はクロネッカーのデルタである．また, α, γ は要素番号を表しており, 離散化された境界値, 入射波は次のように表される．

$$\phi_{\alpha}^{i;n} = \phi(\boldsymbol{x}_{\alpha}, (n+c_i)\Delta t) \quad (\phi = p^{\mathrm{in}}, p, \ \text{or} \ q)$$

ここで, q は圧力の法線方向勾配, $\boldsymbol{x}_{\alpha}$ は要素の重心, Δt は時間増分, c_i は IRK 法における Butcher の係数パラメータ[4] である．また, 式 (4) 中の $A_{\gamma\alpha}^{ij;\kappa}, B_{\gamma\alpha}^{ij;\kappa}$ は基本解に対応する影響関数であり, 次のように表される．

$$\left(\mathbf{A}_{\gamma\alpha}^{\kappa}\right)_{ij} = A_{\gamma\alpha}^{ij;\kappa}, \quad \left(\mathbf{B}_{\gamma\alpha}^{\kappa}\right)_{ij} = B_{\gamma\alpha}^{ij;\kappa}$$

$$\mathbf{A}_{\gamma\alpha}^{\kappa} = \mathcal{F}_{l\kappa}^{-1}\left[\sum_{\beta=1}^{m}\boldsymbol{E}_{\beta}(\zeta_l)\int_{S_\alpha}\hat{G}(\boldsymbol{x}_\gamma, \boldsymbol{y}, \lambda_{\beta}^{l})dS_y\right] \tag{5}$$

$$\mathbf{B}_{\gamma\alpha}^{\kappa} = \mathcal{F}_{l\kappa}^{-1}\left[\sum_{\beta=1}^{m}\boldsymbol{E}_{\beta}(\zeta_l)\ \text{p.v.}\int_{S_\alpha}\hat{H}(\boldsymbol{x}_\gamma, \boldsymbol{y}, \lambda_{\beta}^{l})dS_y\right] \tag{6}$$

ここで, S_α は要素領域であり, $\hat{G}, \hat{H}$ は 3 次元音響波動問題に対するラプラス変換領域基本解, 及びその法線方向勾配である．また, p.v. は積分をコーシーの主値の意味で評価することを表している．$\mathcal{F}_{l\kappa}^{-1}$ は離散逆フーリエ変換であり, 次のように定義している．

$$\mathcal{F}_{l\kappa}^{-1}[\phi_l] = \frac{\mathcal{R}^{-\kappa}}{L}\sum_{l=0}^{L-1}\phi_l \mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}\kappa l}{L}} \tag{7}$$

一方, 対応する離散フーリエ変換は次のように与えられる．

$$\mathcal{F}_{\kappa l}[\phi_\kappa] = \sum_{\kappa=0}^{L-1}\mathcal{R}^{l}\phi_\kappa \mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}\kappa l}{L}} \tag{8}$$

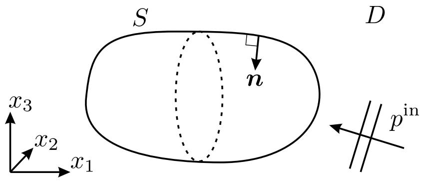

図 1 3 次元音響波動問題に対する解析モデル

Key Words: 時間領域境界要素法, 演算子積分法, 高速多重極法, 高速畳込み演算
〒 152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1-W8-22・TEL/FAX: 03-5734-3587

式 (5)–(8) に含まれる $\boldsymbol{E}_\beta, \zeta_l, \lambda^l_\beta, \mathcal{R}, L$ は IRK 法を用いた CQM のパラメータであり, 詳細は文献 [1] を参照されたい.

以上より, 境界積分方程式 (4) に境界 S における適切な境界条件を代入し, ゼロステップ目から順に解析を進めていくことができる. このとき, 最も計算量が大きくなるのは式 (4) 右辺の遅延ポテンシャル計算であり, この部分に高速畳込み演算 [3] を適用して計算の高速化を図る.

3. 高速畳込み演算の適用に関して

式 (4) 右辺の行列–ベクトル積の計算手順を説明するため, 例として, $A^{ij;\kappa}_{\gamma\alpha}$ に関する項を取り上げる. $(\mathbf{q}^k_\alpha)_j = q^{j;k}_\alpha$ とし, 空間に関する添字 α, γ, 及びその総和記号を省略すると, 式 (4) 右辺の $A^{ij;\kappa}_{\gamma\alpha}$ に関する項の時間方向の行列–ベクトル積演算は次のように表すことができる.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^1 & & & 0 \\ \mathbf{A}^2 & \mathbf{A}^1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \mathbf{A}^N & \mathbf{A}^{N-1} & \cdots & \mathbf{A}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}^0 \\ \mathbf{q}^1 \\ \mathbf{q}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{q}^{N-1} \end{Bmatrix} \tag{9}$$

式 (9) より, 時間方向に関して, 左下三角形 Toeplitz 行列と境界値ベクトルの演算が必要であることがわかる.

高速畳込み演算は, 第 n ステップにおける境界値計算を行うとき, $n-1$ ステップ目までのベクトル成分が既知であるという条件の下, 式 (9) のような左下三角形 Toeplitz 行列とベクトルの積を高速フーリエ変換 (FFT) を用いて高速に計算するアルゴリズムである. そのため, 式 (7), (8) で定義される離散 (逆) フーリエ変換を用いることによって, 式 (9) の計算に高速畳込み演算を適用することができる. 計算の過程において, フーリエ像空間での空間方向の行列–ベクトル積演算が必要となるが, 従来と同様の手順で高速多重極法による計算が可能である. 高速畳込み演算, フーリエ像空間における高速多重極法の詳細は, それぞれ文献 [3, 1] 等を参照されたい.

4. 計算効率について

本提案手法の有効性を示すため, 実際に数値解析を行ったときの計算量を示す. 解析モデルは原点を中心とする半径 a の球形散乱体による平面波の散乱問題であり, 散乱体の界面 S における境界条件は $q = 0$ とした. 入射波は次式で表される振幅 p_0 の x_1 方向に伝搬する平面波とした.

$$p^{\rm in}(\boldsymbol{x}, t) = p_0 \left(1 - \cos 2\pi\Lambda\right) H(\Lambda) H(1-\Lambda) \tag{10}$$

$$\Lambda = \frac{ct - (x_1 + a)}{\lambda^{\rm in}} \tag{11}$$

ここで, $\lambda^{\rm in}$ は中心周波数に対応する波長であり, $\lambda^{\rm in}/a = 1.0$ とした. また, H は Heaviside のステップ関数である. 時間増分は, $c\Delta t/a = 0.069$ とし, 3 段 5 次の Radau IIA 法 [4] を IRK 法として CQM に用いた.

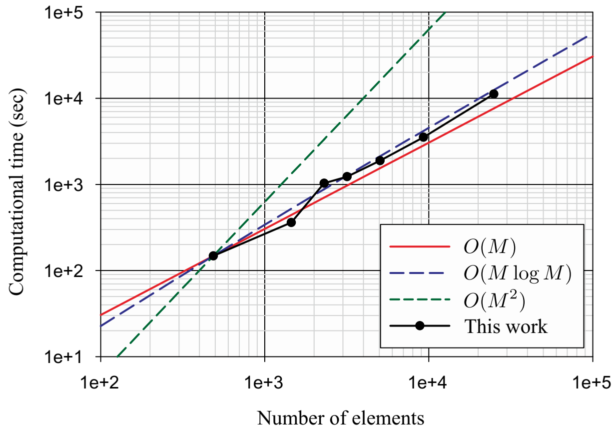

図 2 要素数 M を変化させたときの計算時間

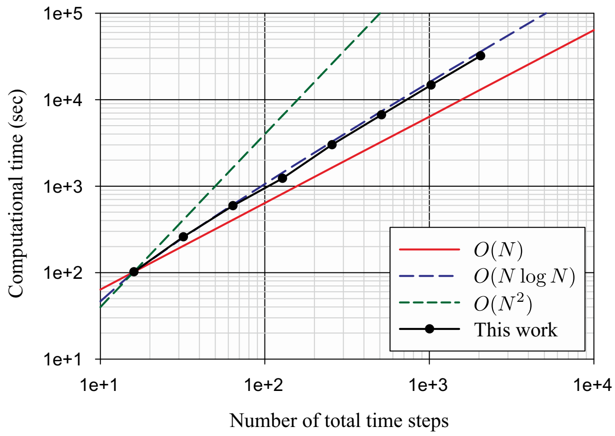

図 3 総時間ステップ数 N を変化させたときの計算時間

総時間ステップ数を $N = 128$ で固定し要素数 M を変化させたときの計算時間を**図 2**, 要素数を $M = 3176$ で固定し総時間ステップ数 N を変化させたときの計算時間を**図 3** に示す. **図 2, 3** より, 要素数 M, 総時間ステップ数 N に対する計算量は, それぞれ $O(M \log M)$, $O(N \log N)$ 程度であることがわかる. そのため, 全体の計算量は $O(NM \log N \log M)$ 程度だと考えられる. 従来の CQ-FMBEM[1] の計算量は $O(N^2 M \log M)$ 程度であったため, 時間方向に対して大幅に高速化できていることがわかる. また, 高速畳込み演算の適用に起因して増大する数値誤差は, ほぼ FFT によるもののみであり, 特に問題ないと考えられる.

5. まとめ

本稿では, 高速畳込み演算の CQ-FMBEM への適用方法の簡潔な説明を行った. また, 数値解析に要した計算時間の計測結果から, 提案手法の有効性を示した.

参考文献

1) 丸山泰蔵, 斎藤隆泰, 廣瀬壮一: 3 次元スカラー波動問題に対する陰的 Runge-Kutta 法を用いた演算子積分時間領域高速多重極境界要素法, 土木学会論文集 A2(応用力学), Vol.69, No.2, pp.I_175–I_185, 2013.
2) L. Greengard and V. Rokhlin: A fast algorithm for particle simulations, *J. Comput. Phys.*, Vol.73, pp.325–348, 1987.
3) E. Hairer, C. Lubich, and M. Schlichte: Fast numerical solution of nonlinear Volterra convolution equations, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, Vol.6, pp.532–541, 1985.
4) E. Hairer and G. Wanner 著, 三井斌友監訳: 常微分方程式の数値解法 II, Springer, 2002.