

## 2次元面外波動問題のための新しい時間領域有限要素法・境界要素法結合解法の開発

群馬大学大学院理工学府  
群馬大学大学院理工学府  
東京工業大学大学院情報理工学研究科  
東京工業大学大学院情報理工学研究科

学生会員 ○市川 諒  
正会員 斎藤隆泰  
学生会員 丸山泰蔵  
正会員 廣瀬壮一

### 1. はじめに

有限要素法 (FEM) や境界要素法 (BEM) は、工学の様々な分野で利用されている代表的な数値解析手法である。FEM は有限領域の解析に威力を発揮し、非均質材料の解析や、非線形問題に対応できるものの、無限領域の解析は苦手である。一方、BEM は、非均質の材料や非線形問題の対応は苦手であるものの、無限領域の解析は得意である。したがって、それぞれの解析手法を結合し、それぞれの利点を活かした手法を開発すれば、現状以上に幅広い問題を効率的に解析することが可能となる。このような FEM・BEM 結合解法は、古くから行われているが、波動問題に対しては、従来の時間領域 BEM の特性上、時間増分が小さい場合に数値解が不安定になることが知られている。そこで、本研究では従来の時間領域 BEM に比べ、安定な新しい時間領域境界要素法 (演算子積分時間領域境界要素法)<sup>1)</sup> を用いた新しい FEM・BEM 結合解法を提案する。以下では、定式化の概要について説明した後、数値解析例を示すことで、本手法の有効性について検討する。

### 2. 解くべき問題

図 1 のような無限領域を含む解析モデルを考える。領域  $\Omega_F$  を有限要素領域、無限遠を含む領域  $\Omega_B$  を境界要素領域とし、領域  $\Omega_B$  からの入射波  $u^{in}$  による境界  $\Gamma$  での透過・散乱問題について考える。以下では、簡単のため、2次元面外波動問題を対象とし、直交座標系  $x_1-x_2$  を用い、位置  $\mathbf{x}$ 、時刻  $t$  における面外変位を単に  $u(\mathbf{x}, t)$  と表記する。このとき、面外変位  $u(\mathbf{x}, t)$  は次式を満足する。

$$\mu u_{,kk} - \rho \ddot{u} = 0 \quad (1)$$

ここで、 $\mu$  はせん断弾性定数、 $\rho$  は密度、 $(\cdot)$  は時間に関する微分、 $(\cdot)_{,i}$  は  $\partial/\partial x_i$  を表す。式 (1) を各領域  $\Omega_F, \Omega_B$  で満たす面外変位  $u(\mathbf{x}, t)$  を FEM・BEM 結合解法で求めることが、本解析の目的となる。

### 3. 有限要素領域に対する定式化

全有限要素数を  $M_F$  とし、式 (1) を Galerkin 法で離散化する。例えば、四角形 1 次要素での離散化を考えれば、内挿関数  $N_i (i = 1, \dots, 4)$  を式 (1) に乗じ、Gauss の発散定理を用

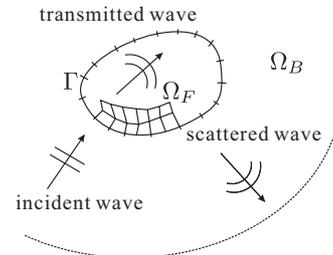


図 1 解くべき問題。

いると、式 (1) は次のように表せる。

$$\sum_{e=1}^{M_F} \sum_{j=1}^4 \int_{S^e} \mu N_{i,k} N_{j,k} dS u_j^e + \sum_{e=1}^{M_F} \sum_{j=1}^4 \int_{S^e} \rho N_j N_i dS \ddot{u}_j^e - \sum_{e=1}^{M_F} \int_{\partial S^e} \mu N_i u_{,k} n_k d\partial S = 0 \quad (2)$$

ここで、 $u_j^e$  は有限要素  $e$  における  $j$  番目の節点変位、 $\partial S$  は有限要素  $S$  の境界、 $n_k$  は  $\partial S$  に対する外向き法線ベクトル成分である。式 (2) の左辺第 3 項を、変位  $u_j^e$  に対応した表面力  $q_j^e$  を用いて書き直すと、

$$\sum_{e=1}^{M_F} \int_{\partial S^e} \mu N_i u_{,k} n_k d\partial S = \sum_{e=1}^{M_F} \sum_{j=1}^4 \int_{\partial S^e} N_i N_j q_j^e d\partial S \quad (3)$$

となる。式 (2) に式 (3) を代入し、 $\Delta t$  を時間増分、第  $n$  ステップ目の節点変位、表面力をそれぞれ  $u_j^{e,n}$ 、 $q_j^{e,n}$  とし、加速度  $\ddot{u}_j^{e,n}$  を後退差分近似すれば、次の有限要素方程式を得る。

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^{M_F} \sum_{j=1}^4 \int_{S^e} [(\Delta t)^2 \mu N_i N_j + \rho N_j N_i] dS \cdot u_j^{e,n} \\ & - (\Delta t)^2 \sum_{e=1}^{M_F} \sum_{j=1}^4 \int_{\partial S^e} N_i N_j d\partial S \cdot q_j^{e,n} \\ & = \sum_{e=1}^{M_F} \sum_{j=1}^4 \int_{S^e} \rho N_i N_j dS (2u_j^{e,n-1} - u_j^{e,n-2}) \quad (4) \end{aligned}$$

### 4. 境界要素領域に対する定式化

次に、無限領域を含む領域  $\Omega_B$  に対し、放射条件の扱いが容易な BEM を適用することを考える。領域  $\Omega_B$  に対する時間領域境界積分方程式は次のように書ける。

$$\begin{aligned} C(\mathbf{x})u(\mathbf{x}, t) &= u^{in}(\mathbf{x}, t) + \int_{\Gamma} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * q(\mathbf{y}, t) d\Gamma_y \\ & - \int_{\Gamma} S(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * u(\mathbf{y}, t) d\Gamma_y \quad (5) \end{aligned}$$

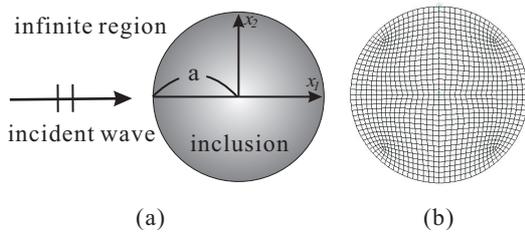


図2 介在物による透過・散乱問題 (a) 解析モデル (b) FEM・BEMメッシュ.

ここで,  $C(\mathbf{x})$  は自由項<sup>2)</sup>,  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ ,  $S(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$  はそれぞれ面外波動問題における時間領域基本解および対応する二重層核である. また,  $*$  は畳み込み積分を表す. 従来の時間領域 BEM では, 式 (5) の計算は, 時間増分が小さい場合に不安定になる. そこで, 式 (5) の畳み込み積分の離散化に, Lubich が提案した演算子積分法 (CQM: Convolution Quadrature Method)<sup>3)</sup> を適用する. 今, 境界  $\Gamma$  を  $M_B$  個の境界要素で離散化 (線形 1 次要素を利用) し, 時間に関しては演算子積分法を適用すれば, 第  $n$  ステップにおいて次の方程式を得る.

$$\sum_i^{M_B} \left\{ \left[ \frac{\phi_i(\mathbf{x}_j)}{2} + B_i^0(\mathbf{x}_j) \right] u_i^n - A_i^0(\mathbf{x}_j) q_i^n \right\} = u^{\text{in},n}(\mathbf{x}_j) + \sum_i^{M_B} \sum_{k=1}^{n-1} A_i^{n-k}(\mathbf{x}_j) q_i^k - \sum_i^{M_B} \sum_{k=1}^{n-1} B_i^{n-k}(\mathbf{x}_j) u_i^k \quad (6)$$

ここで,  $A_i^m, B_i^m$  は影響関数,  $\phi_i(\mathbf{x}_j)$  は境界要素に対する形状関数である. 式 (6) の解析手順や, 登場する関数の詳細については, 例えば文献<sup>1)</sup> 等を参照されたい.

## 5. 有限要素法と境界要素法の結合

式 (4), (6) を連立して解くために, 境界  $\Gamma$  にて次の連続条件を与える.

$$u_{iB}(\mathbf{x}) = u_{iF}(\mathbf{x}), q_{iB}(\mathbf{x}) + q_{iF}(\mathbf{x}) = 0 \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad (7)$$

ここで, 下付き添え字  $F$  は有限要素領域,  $B$  は境界要素領域における変位や表面力を表す. 式 (4), (6) に式 (7) を用いて第  $n$  ステップにおける境界上の変位, 表面力を未知数とした連立一次方程式を導出し, 第一ステップから順に解くことにより, 全時間ステップにおける境界未知量を求めることができる. なお, 実際の計算では, 式 (4) の左辺第二項の  $\partial S$  に関する積分は, 隣り合う有限要素で打ち消し合い, 境界  $\Gamma$  に一致する線積分のみを実行すればよいことに注意する.

## 6. 数値解析例

数値解析例として, 図 2(a) のような半径  $a$  の介在物による透過・散乱問題を考える. ここで, 入射波は平面波とし, 次式で与えた.

$$u^{\text{in}}(\mathbf{x}, t) = u_0(1 - \cos 2\pi\alpha)$$

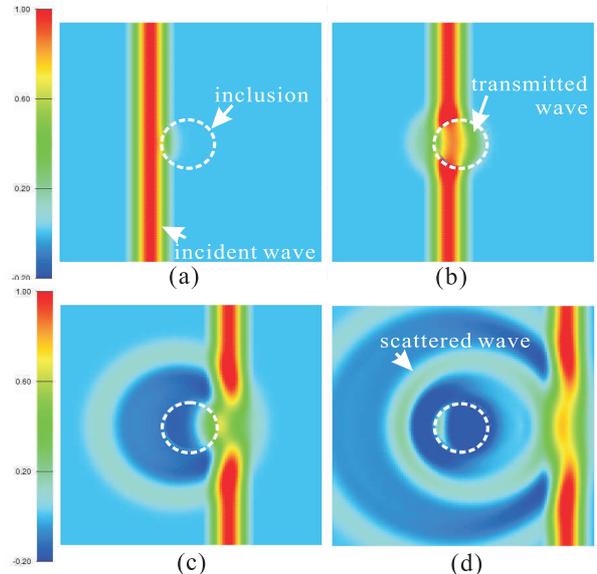


図3 介在物内部およびその周辺の面外方向変位場 (a)  $t=0.5$  (b)  $t=1.5$  (c)  $t=3.5$  (d)  $t=6.0$ .

$$\alpha = \begin{cases} \frac{c}{\lambda} \left( t - \frac{x_1 + a}{c} \right) & \text{for } (0 \leq \alpha \leq 1) \\ 0 & \text{for otherwise} \end{cases} \quad (8)$$

ただし,  $c$  は波速,  $u_0$  は振幅,  $\lambda$  は波長である. 解析では, 入射波の振幅を  $u_0 = 1.0$ , 領域  $\Omega_F, \Omega_B$  における波速, 密度をそれぞれ  $c_F = \sqrt{2}, c_B = 1.0, \rho_F = \rho_B = 1.0$  とし, 入射波の波長を  $\lambda = 1.0$ , 介在物の半径を  $a = 1.0$  とした. また, 図 2(b) のように, 1 波長に対して十分な要素節点を配置できるように, 介在物は有限要素数  $M_F = 1092$ , 境界要素数  $M_B = 104$  の要素で離散化した. このとき, 全節点数は 1145, 境界要素は図 2(b) の円周境界となる. また, 総時間ステップ数  $n = 128$ , 時間増分  $\Delta t = 0.05$  とした. 図 3(a)-(d) はそれぞれ  $t = 0.5, 1.5, 3.5, 6.0$  における介在物内部および周辺の面外方向変位場を示している. 図 3(a) では, 入射波が介在物に到達し, 図 3(b) で介在物中の透過波が入射波より速く伝播している様子を確認できる. この理由は, 有限要素領域  $\Omega_F$  では, 波速  $c_F$  が母材の  $c_B$  より速く設定されているためである. また, 図 3(c), (d) より, 入射波が介在物により散乱され, 散乱波は  $x_1$  軸に関する対称性を崩さず伝搬しており, 妥当な結果が得られていると言える.

## 7. まとめと今後の課題

2次元面外波動問題における新しい時間領域 FEM・BEM 結合解法の定式化を行った. 簡単な数値解析を行い, 結果の妥当性を確認した. 今後は, より複雑なモデルの解析や, 3次元問題への拡張を行う予定である.

### 参考文献

- 1) 福井卓雄・斎藤隆泰: Lubich の演算子積分法における高速多重極法, 日本シミュレーション学会論文誌, 小特集: 境界要素法の新展開, vol.28 No.3, pp.17-22, (2009).
- 2) 小林昭一編著: 波動解析と境界要素法, 京都大学学術出版会, (2000).
- 3) Lubich, C.: Convolution quadrature and discretized operational calculus I and II, *Numer. Math* 52, pp.129-145 and pp.413-425, (1988).