

NURBS による物体形状作成と運動解析

日本大学 学生会員 ○齋藤 良平
 日本大学 フェロー 野村 卓史
 日本大学 正会員 長谷部 寛

1. はじめに

有限要素法は構造解析や流体解析など幅広い工学分野で用いられている. しかしコンピュータの発展とともに大規模な解析が行われるようになるに従い解析領域を離散化するときには多くの時間と労力がかかるようになってきた. また CAD で作成された曲面形状を厳密に表現しきれない. そこで CAD で用いられる NURBS (Non-Uniform-Rational-B-spline) を有限要素の基底関数に用いた IGA (Isogeometric Analysis) という解析手法が提案されている¹⁾.

本研究では NURBS を用いて物体形状を作成し,物体の運動解析を実施することを目的とする.

2. NURBS による曲線の表現

NURBS 基底関数は次式(1)で定義される.

$$R_i^p(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi)w_i}{\sum_{k=1}^n N_{k,p}(\xi)w_k} \quad (1)$$

ここで R_i^p は NURBS 基底関数, $N_{i,p}$ は各成分の B-spline 基底関数, w_i は重み, p は基底関数の次数, n は基底関数の数, i はノットベクトル $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$ の成分の番号である.

B-spline 基底関数 $N_{i,p}$ は以下のように逐次的過程により定義される.

次数 $p=0$ のとき

$$N_{i,p}(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{if } \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2)$$

次数 $p>0$ のとき

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1} \quad (3)$$

ノットベクトル Ξ はノット値 ξ_i が同じ, もしくは大きくなるように並べなければならない. NURBS 曲線は基底関数とコントロールポイントの線形結合によって形状を表現することができる.

$$\mathbf{C}(\xi) = \sum_{i=0}^n R_i^p(\xi) \mathbf{B}_i \quad (4)$$

ここで $\mathbf{C} = (x(\xi), y(\xi))^T$ は NURBS 曲線, $\mathbf{B}_i = (x_i, y_i)^T$ はコントロールポイントである.

図1は NURBS を用いて描いた円と円の導関数である. コントロールポイントに重みを加えてより自由度の高い形状を表現することが可能である.

3. 物体形状作成と面積, 断面二次極モーメントの算出

NURBS 曲線を用いて, 半円を3つ組み合わせた図2のハート型の物体形状を作成した. 面積, 図心まわりの断面二次極モーメントはガウスの発散定理により算出することとする.

2次元形状の場合, ガウスの発散定理は以下のように表される.

キーワード Isogeometric Analysis, NURBS, B-spline, 運動解析, ガウスの発散定理

連絡先 〒101-8308 東京都千代田区神田駿河台1丁目8-14 日本大学大学院理工学研究科土木工学専攻 TEL03-3259-0411

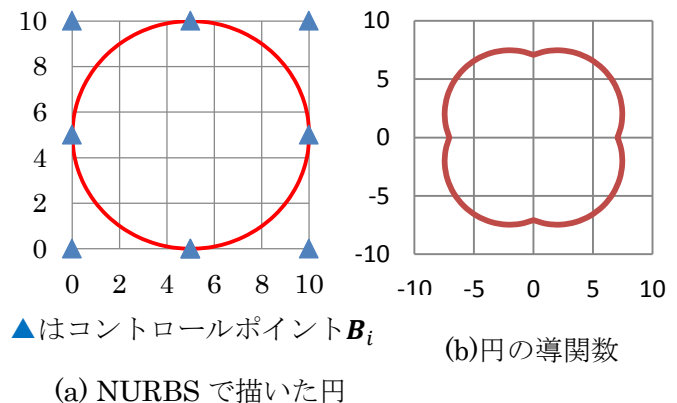


図1 NURBS で描いた円と円の導関数

$$\begin{aligned} \Xi &= \{0, 0, 0, 1, 1, 2, 2\} \\ \mathbf{B}_i &= (5, 0), (10, 0), (10, 5), (10, 10), \\ &\quad (5, 10), (0, 10), (0, 5), (0, 0), (5, 0) \\ w_i &= (1, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1) \end{aligned}$$

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\Gamma} (F_x n_x + F_y n_y) ds \quad (5)$$

ここで、 Ω は物体が占める領域、 Γ は物体の境界、

$\mathbf{n} = \langle n_x, n_y \rangle^T$ は境界 Γ 上の外向き法線ベクトルである。

面積を求めるために被積分関数を以下のように与える。

$$F_x = \frac{1}{2}x, \quad F_y = \frac{1}{2}y \quad \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \right) \quad (6)$$

面積は次式のように求めることができる。

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{\xi_L} \left(x(\xi) \frac{dy}{d\xi} - y(\xi) \frac{dx}{d\xi} \right) d\xi \quad (7)$$

ここで $dy/d\xi = n_x, -dx/d\xi = -n_y$ である。

次に断面二次極モーメントを算出する $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ を物体

の図心を原点とする座標系とすると、 z 軸周りの断面二次極モーメント $I_{\bar{z}}$ は次のように表される。

$$I_{\bar{z}} = \iint_{\Omega} (\bar{x}^2 + \bar{y}^2) d\bar{x} d\bar{y} \quad (8)$$

そこで被積分関数を次のように与える。

$$F_x = \frac{1}{3}\bar{x}^3, \quad F_y = \frac{1}{3}\bar{y}^3 \quad \left(\frac{\partial F_x}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial F_y}{\partial \bar{y}} = \bar{x}^2 + \bar{y}^2 \right) \quad (9)$$

$I_{\bar{z}}$ は次式になる。

$$I_{\bar{z}} = \frac{1}{3} \int_0^{\xi_L} \left(\bar{x}^3 \frac{dy}{d\xi} - \bar{y}^3 \frac{dx}{d\xi} \right) d\xi \quad (10)$$

図 2 のハート型について、式(7),(10)に台形則を適用し、 $\Delta\xi=0.1$ として数値積分した結果、表 1 に示すように小さい誤差で求めることができた。

4. 運動解析

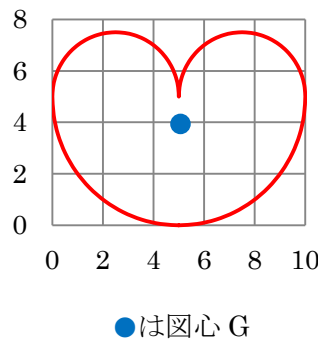
Newmark β 法を用いて、図 2 のハート型をした単位厚さの板状物体の運動解析を行った。表 2 は物体の運動解析の諸条件を示す。図 3 は運動解析結果を軌跡がわかるように図示したものである。

5. まとめ

CAD で用いられる NURBS を用いて物体形状を作成し、運動解析を行った。物体形状は有限要素法では表現しきれない厳密な形状を描くことができた。面積、図心、断面二次極モーメントの計算はガウスの発散定理を用いて計算し、理論値との誤差が少ない値を得ることができた。今後は 3 次元の物体を作成し、その運動解析を行う予定である。

参考文献

- 1) J. A. Cottrell, T. J.R. Hughes, Y. Bazilevs : Isogeometric Analysis Toward Integration of CAD and FEA, WILEY, 2009.



$$\Xi = \left\{ \begin{array}{ccccccc} 0, & 0, & 0, & 1, & 1, & 2, & 2 \\ 3, & 3, & 4, & 4, & 5, & 5, & 6, & 6 \end{array} \right\}$$

$$\mathbf{B}_i = (5,0), (10,0), (10,5), (10,7.5), (7.5,7.5), (5,7.5), (5,5), (5,7.5), (2.5,7.5), (0,7.5), (0,5), (0,0), (5,0)$$

$$w_i = \left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 \right)$$

図 2 NURBS で描いたハート型

表 1 ハート型の諸量の計算結果

	計算値	理論値	誤差
面積 A	58.85	58.90	-0.88%
図心 x_G	5.075	5.000	1.5%
図心 y_G	3.939	3.939	0%
$I_{\bar{z}}$	607.6	608.9	-0.14%

表 2 運動解析の諸条件

	x	y	z
図心の初期位置	-11.0	20.0	0.0
初速度[m/s]	10.0	10.0	0.0
初期角速度[rad/s]	0.0	0.0	-2.0
重力加速度[m/s ²]	9.8		
物体の密度[kg/m ³]	2.410		
質量[kg]	141.83		
慣性モーメント[kg m ²]	0.0	1464.316	0.0
時間積分間隔[s]	0.01		
総積分ステップ	300		

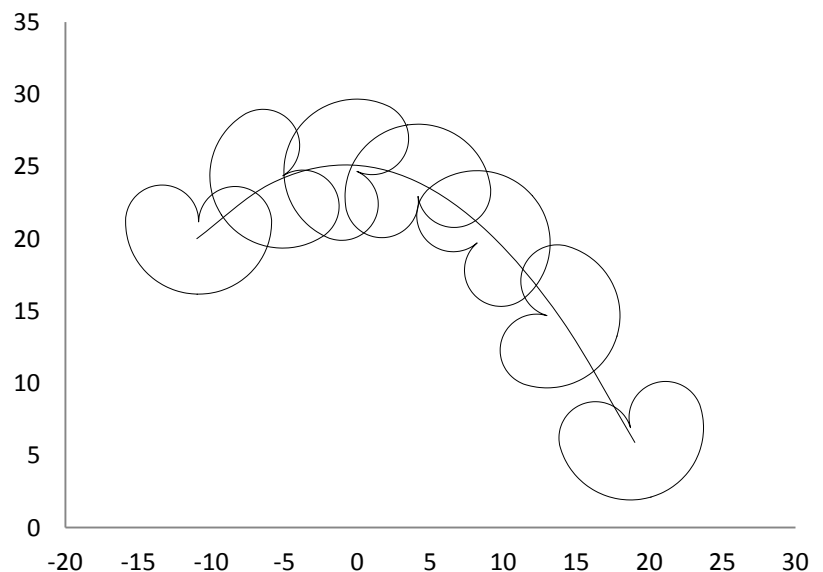


図 3 ハート型の重心の軌跡と回転運動