火災シミュレーション構築のための低マッハ数近似の妥当性の検証

中央大学大学院　学生員　○ 川口　泰斗
中央大学大学院　学生員　堀池　慎治
中央大学　正会員　樫山　和男

1. はじめに

わが国では近い将来，首都直下型地震の発生が予想されているが，建物の密集する都市部で巨大地震が発生した場合には火災によって甚大な被害が出ることが懸念されている．そのため火災の延焼性状を正確に把握して都市火災への防災減災対策を講じる必要があり，都市部における高精度な火災シミュレーション手法の構築が求められている．既往の研究では直交格子を用いた差分法による火災シミュレーション等[1]が行われてきたが，都市の複雑形状を正確に考慮することは困難といえる．そこで本研究では任意形状への適合性に優れる有限要素法を用いて都市の複雑形状を正確に考慮可能な高精度な火災シミュレーション手法の構築を目的とする．

これまで著者らは，Boussinesq 近似を用いて都市の温熱環境シミュレーションの構築を行ってきた[2]．しかし，火災時は温度差が非常に大きくため，Boussinesq 近似の適用が困難となる．そこで本研究では，火災シミュレーション手法構築の基礎研究として，低マッハ数近似を用いた基礎方程式に対する有限要素法に基づく方法を提案する．また，流れ場（速度場と圧力場）と温度場は分離した，弱連成手法を採用する．本報告では，離散化手法を示すとともに，cavity 内自然対流解析を例に，Boussinesq 近似を用いた結果との比較のもとに手法の妥当性を検証する．

2. 数値解析手法

(1) 基礎方程式

低マッハ数近似は圧縮性 Navier − Stokes 運動方程式をもとにして，流れのマッハ数が小さいことを仮定して得られる近似である．特徴としては大きな温度変化に伴う，密度の変化を考慮できる点である．低マッハ数近似を用いて，無次元化された Navier − Stokes 運動方程式，連続式，エネルギー方程式および状態方程式を以下に示す．

Navier − Stokes 運動方程式:

$$\rho\Big(\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\Big)+\frac{\partial p}{\partial x_i}-\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big) -G_a\Big(\rho-1\Big)\delta_{i3}=0 \qquad \text{in} \quad \Omega \tag{1}$$

連続式:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i}=0 \qquad \text{in} \quad \Omega \tag{2}$$

エネルギー方程式:

$$\frac{\partial T}{\partial t}+u_i\frac{\partial T}{\partial x_i}-\frac{1}{\rho Pr}\frac{\partial^2 T}{\partial {x_i}^2}=0 \tag{3}$$

状態方程式:

$$\rho=\frac{1}{\Big(\beta\Delta T T+1\Big)} \tag{4}$$

ここで，u_i は x_i 方向の流速，p は圧力，T は温度，ρ は密度，$\Delta T(=T_w-T_c)$ は高温壁と低温壁の温度差，δ_{i3} はクロネッカーのデルタ，$G_a(=gL^3/\nu^2)$ は Galilei 数，P_r は Prantdl 数である．ただし，g は重力加速度，$\beta(=1/t_0)$ は体膨張係数，ν は動粘性係数，α は温度伝導率である．

(2) 流れ場の離散化

本論文では流れ場の離散化手法として速度場と圧力場を分離して解く分離型解法（流速修正法）を用いて解析を行う．分離型解法ではまず基礎方程式に対して時間の離散化を行う．式 (1),(2) に対して時間方向の離散化に前進差分を用いると以下のようになる．

Navier − Stokes 運動方程式:

$$\frac{\rho u_i^{n+1}-\rho u_i^n}{\Delta t}+\rho u_j^n\frac{\partial u_i^n}{\partial x_j}+\frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i}-\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial u_i^n}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j^n}{\partial x_i}\Big) - G_a\Big(\rho^n-1\Big)\delta_{i3}=0 \tag{5}$$

連続式:

$$\frac{\rho^{n+1}-\rho^n}{\Delta t}+\frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i}=0 \tag{6}$$

ただし圧力は未知であるため $n+1$ としている．次に中間流速 $\widetilde{u_i}$ を次のように定義する．

中間流速の式:

$$\rho\widetilde{u_i}=\rho u_i^n-\Delta T\Big(\rho u_j^n\frac{\partial u_i^n}{\partial x_j^2}-\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial u_i^n}{\partial x_j^n}+\frac{\partial u_j^n}{\partial x_i^n}) -G_a(\rho^n-1)\Big) \tag{7}$$

式 (5) を変形して，発散をとり，式 (6),(7) を考慮することによって次の圧力の Poisson 方程式を得る．

圧力の Poisson 方程式:

$$\frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial x_i^2}=\frac{\rho^{n+1}-\rho^n}{\Delta t^2}-\Delta T\frac{\partial \rho\widetilde{u_i}}{\partial x_i} \tag{8}$$

また式 (5) を変形して中間流速を考慮すると，次の流速修正に関する式を得る．

流速修正の式:

$$\rho {u_i}^{n+1}=\rho\widetilde{u_i}-\Delta t\frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} \tag{9}$$

KeyWords：　火災シミュレーション, 安定化有限要素法, 低マッハ数近似

連絡先：　〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27　TEL. 03-3817-1815

次に式 (7), (8), (9) に対して有限要素法を適用して以下に示す弱形式を導く.

中間流速の式:

$$\int_\Omega w_i \left(\rho\widetilde{u_i} - \rho u_i^n\right) + \Delta t\Bigg(\int_\Omega w_i \rho u_j^n \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} d\Omega - \int_\Omega w_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^n}{\partial x_i}\right) d\Omega - \int_\Omega w_i G_a\left(\rho^n - 1\right) k d\Omega\Bigg) + \int_\Omega \tau \bar{u_k} \frac{\partial w_i^h}{\partial x}\Bigg(\rho\widetilde{u_i} - \rho u_i^n + \Delta t\Bigg(\rho u_j^n \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^n}{\partial x_i}\right) - G_a\left(\rho^n - 1\right)\Bigg)\Bigg) \tag{10}$$

圧力の Poisson 方程式:

$$\int_\Omega \frac{\partial^2 P^*}{\partial x_i} \frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial x_i} d\Omega = \frac{1}{\Delta t^2}\int_\Omega P^*\left(\rho^{n+1} - \rho^n\right) d\Omega + \frac{1}{\Delta t}\int_\Omega P^* \frac{\partial \rho \bar{u_i}}{\partial x_i} \tag{11}$$

流速修正の式:

$$\int_\Omega w_i \rho {u_i}^{n+1} d\Omega = \int_\Omega w_i \rho \widetilde{u_i} d\Omega - \Delta t \int_\Omega w_i \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} d\Omega \tag{12}$$

ただし, w_i, P^* はそれぞれ流速と圧力の重み関数である. また, Ω_e は要素の領域, $\bar{u_i}$ は移流速度, τ は安定化パラメータ, Δt は微小時間増分量を表す.

次に, 弱形式に対して P1/P1 (流速・圧力一次補間) 要素を用いて空間方向の離散化を行い, 以下に示す有限要素方程式を導く.

中間流速の式:

$$\left(M + M_\delta\right)\rho\,\widetilde{u_i} = \left(M + M_\delta\right)\rho u_i^n - \Delta t\{\left(K + K_\delta\right) + S u_i^n + G_a\left(M + M_\delta\right)\left(\rho^n - 1\right)k\} \tag{13}$$

圧力の Poisson 方程式:

$$A p^{n+1} = -\frac{1}{\Delta t^2} M\left(\rho^{n+1} - \rho^n\right) - \frac{1}{\Delta t} H \rho \widetilde{u_i} \tag{14}$$

流速修正の式:

$$M \rho u_i^{n+1} = M \rho \widetilde{u_i} - \Delta H p^{n+1} \tag{15}$$

ここで, M 質量行列, K は移流行列, S は発散行列, H は圧力行列, A は粘性項を表す. また, 添え字 δ は SUPG 項に起因するものを表す.

(3) 温度場の離散化

温度場の空間方向の離散化には, SUPG 法[3] に基づく安定化有限要素法を適用する. エネルギー方程式に対して SUPG 法に基づく安定化有限要素方程式を適用すると以下の弱形式を得る.

$$\int_\Omega w\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right) d\Omega + u_i \frac{\partial T}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho Pr}\int_\Omega \frac{\partial^2 T}{\partial {x_i}^2} d\Omega + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau_{supg}\left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_i \frac{\partial T}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho Pr}\frac{\partial^2 T}{\partial {x_i}^2}\right) d\Omega = 0 \tag{16}$$

弱形式に対して P1/P1(流速・圧力一次補間) 要素を用いて空間方向の離散化を行うと, 以下の有限要素方程式を得る.

$$\left(M + M_\delta\right)\frac{\partial T}{\partial t} + \left(K\left(u_i\right) + K_\delta\left(u_i\right)\right)\frac{1}{\rho Pr} S = 0 \tag{17}$$

一方, 時間方向の離散化には 2 次精度 Crank-Nicolson 法を用いて離散化を行う.

$$\frac{M + M_\delta}{\Delta t} + \theta\left(K(u_j) + K_\delta(u_j) + \frac{1}{PrRe}\right) T^{n+1} = B^n \tag{18}$$

ここで, B^n はエネルギー方程式の既知項をまとめたものである. なお連立一次方程式の解法には, Element-by-Element 処理を施した GPBi-CGSTAB2 法を用いる.

(4) 計算手順

計算手順は

① エネルギー方程式から温度 T を, 状態方程式から密度 ρ を求める.

② 求めた温度 T と密度 ρ を用いて, 中間流速の式から中間流速 $\tilde{u}$ を, 圧力の Poisson 方程式から圧力 p を求める.

③ 求めた中間流速 $\tilde{u}$ と圧力 p を用いて, 流速の式から流速 u を求める.

これを時間ステップごとに繰り返して解析を進める.

3. 正方形 Cavity 内自然対流問題

本解析手法を用いて, 正方形 Cavity 内において, 上下面を断熱条件とし左右の側面をそれぞれ一定温度に加熱, 冷却した場合に生じる自然対流を解析する, なお解析条件および解析結果は発表時に示すものとする.

4. おわりに

本報告では, 火災シミュレーション構築の基礎研究として, 低マッハ数近似を用いた基礎方程式に対する有限要素法に基づく離散化手法示すとともに, cavity 内自然対流解析を行い, Boussinesq 近似を用いた結果との比較のもとに手法の妥当性の検証を行った.

今後は, 既往の実験結果等との比較検討を行う予定である.

参考文献

1) 黄弘, 加藤信介, 大岡龍三：火の粉の飛来を組み込んだ都市火災伝搬の CFD 解析：日本流体力学会数値流体力学部門 Web 会誌,Vol.12, No.2,1992.

2) 池田哲也, 樫山和男：安定化有限要素法による都市の温熱環境解析手法の構築：応用力学論文集, Vol.15, No.68, pp.107-114, 2013.

3) T.E.Tezduyar: Stablized finite element formulations for incompressible flow computations,, *Advance in Applied Mechanics* ,Vol.28,pp.1-44,1992.