移動境界を考慮した安定化有限要素法による津波解析

中央大学 学生員 ○ 花澤 広貴
(株) エイト日本技術開発 正会員 大川 博史
中央大学 正会員 樫山 和男

1. はじめに

2011 年に発生した東北地方太平洋沖地震に伴う津波によって, 沿岸地域は甚大な被害を受け, 津波による被害を事前に予測することの重要性が再認識された. 津波の数値シミュレーションにおいては, 遡上域での浸水深や構造物に働く流体力などをより正確に予測することが求められており, その高精度化を図ることは重要である. 遡上域では移動境界手法が用いられているが, この手法が遡上領域での解の精度に与える影響は大きい.

そこで本研究では, 安定化有限要素法を用いた津波遡上解析における移動境界手法の比較・検討を行うことを目的とする. 支配方程式には Boussinesq 方程式を用い, 離散化手法には, 空間方向に SUPG 法に基づく安定化有限要素法[2)]を, 時間方向に Crank-Nicolson 法を用いる. 数値解析例として, 孤立波の遡上問題[3)]を取り上げる.

2. 数値解析手法

(1) 支配方程式

支配方程式には, 以下に示す非線形性と分散性を考慮した Boussinesq 方程式（非線形分散波方程式）を用いる.

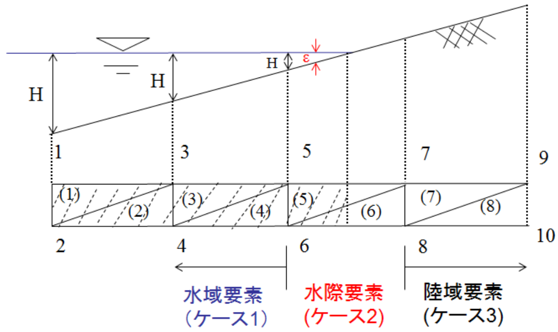
$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}+\mathbf{A}_i\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{x}_i}-\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i}\left(\mathbf{N}_{ij}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{x}_j}\right)=\frac{\partial^2}{\partial t\partial \mathbf{x}_i}(\mathbf{K})+\mathbf{R}-\mathbf{GU} \qquad (1)$$

ここで, $\mathbf{U}$ は未知数ベクトルであり, $\mathbf{K}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{A}_i$, $\mathbf{N}_{ij}$, $\mathbf{G}$ はそれぞれ分散項, 水底勾配項, 移流項, 拡散項, 摩擦項に対する行列である.

支配方程式 **(1)** に対して, 空間方向の離散化として三角形一次要素を用い, SUPG 法に基づく安定化有限要素法を適用すると以下に示す弱形式が得られる.

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \mathbf{U}^*\cdot\left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}+\mathbf{A}_i\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i}+\mathbf{GU}-\mathbf{R}\right)d\Omega\\
&+\int\left(\frac{\partial \mathbf{U}^*}{\partial x_i}\right)\cdot\left(\mathbf{N_{ij}}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_j}+\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{K})\right)d\Omega\\
&+\sum_{e=1}^{n_{el}}\int_{\Omega_e}\tau(\mathbf{A}_i)^T\left(\frac{\partial \mathbf{U}^*}{\partial x_i}\right)\cdot\left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}+\mathbf{A}_i\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i}+\mathbf{GU}-\mathbf{R}\right)d\Omega\\
&+\sum_{e=1}^{n_{el}}\int_{\Omega_e}\delta\left(\frac{\partial \mathbf{U}^*}{\partial x_i}\right)\cdot\left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i}\right)d\Omega=0 \qquad (2)
\end{aligned}$$

式 (2) 中の第一項と第二項は Galerkin 項, 第三項は SUPG 項, 第四項は衝撃捕捉項であり, SUPG 項によって移流項の卓越を抑え, 衝撃捕捉項によって不連続面での数値不安定性を抑える. 時間方向の離散化として, 2 次精度を有する Crank-Nicolson 法を用い, 連立一次方程式の解法には, Element-By-Element Bi-CG STAB 法を用いる.



図－1 移動境界の概念図

(2) 移動境界手法

移動境界手法は, 固定メッシュに基づく Euler 的手法と移動メッシュに基づく Lagrange 的手法があるが, 本研究では任意形状への適合性に優れた Euler 的手法を用いる. 各要素の陸水判定のために, 微小水深 ε を設定し, 以下に示すように全水深 H と微小水深 ε を比較し判定を行っていく.

a) 手法 1[2)]

- ケース 1

  図-1 中 (1)～(4) の要素のように, 全ての節点の全水深が微小水深以上なら, その要素を水域要素とし, 処理は行わない.

- ケース 2

  図-1 中 (5),(6) の要素のように, 一つもしくは二つの節点の全水深が微小水深以上なら, その要素を水際要素とし, 陸域節点の流速を 0 とする.

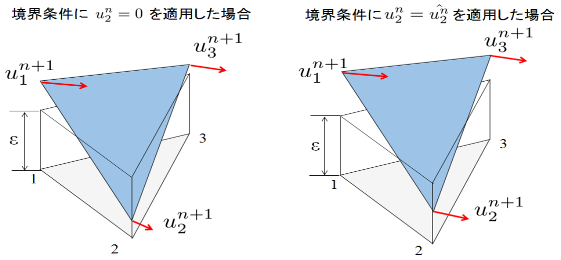
- ケース 3

  図-1 中 (7),(8) の要素のように, 全ての節点の全水深が微小水深未満なら, その要素を陸域要素とし, 節点の流速を 0 とする.

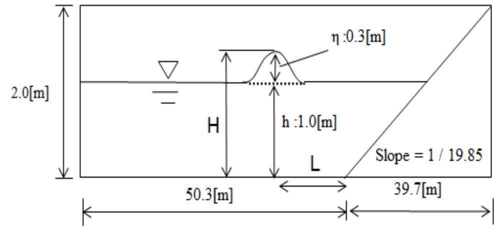
b) 手法 2[3)]

図-2 に示すように, 境界条件として流速 0 を与えると, 重ね合わせにおいて 0 を含むため次ステップにおいて流速が減少してしまう. そこで手法 2 では, 水際要素 (ケース 2) における陸域節点に与える境界条件を検討する. 手法 2-a として, 陸域節点の流速を水域節点の平均値として与える. 手法 2-b として, 陸域節点の流速を, 水域節点のうち水深の小さい節点の流速を与える. 手法 2-c として, 陸域節点の流速を, 水域節点のうち水深の大きい節点の流速を与える.

KeyWords： 安定化有限要素法, Boussinesq 方程式, 移動境界手法
連絡先： 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 TEL：03-3817-1815 E-mail：hanazawa@civil.chuo-u.ac.jp



図－２ 水際要素における処理 (左:手法１　右:手法２)



図－３ 数値解析モデル

3. 数値解析例

手法 1 及び手法 2 の比較・検討を行うため，孤立波の遡上問題を取り上げる．解析モデルには**図-3** に示すような Synolakis の水理実験モデル[3] を用いる．解析条件として, 初期波形を以下に示す式で与える．境界条件として壁面で slip 条件を与える．メッシュ幅 $0.05m$, 微小時間増分量 $0.005s$, 微小水深 $6.5 \times 10^{-3}m$ とした．

$$\eta = H\left(sech\sqrt{\frac{3H}{4h^3}}(x-ct)\right)^2 \tag{3}$$

$$L = \left(\frac{4h^3}{3H}\right)^{\frac{1}{2}} Arccosh\left(\frac{1}{0.05}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4}$$

無次元化時間 20, 25, 30, 40, 50 における波形を**図-4**～**図-8** に示した．t'=20 においては, 波が遡上域に達していないため, 手法 2 の結果は手法 1 の結果と一致している．一方, 砕波時の t'=25 においては手法 2 の結果は手法 1 に比べて良い一致を示していることがわかる．遡上時の t'=30, 40, 50 においては, 手法 2 の結果は手法 1 に対して波が前進していることがわかる．また, 境界条件として与える流速が大きいほど, 波が前進することがわかる．

4. おわりに

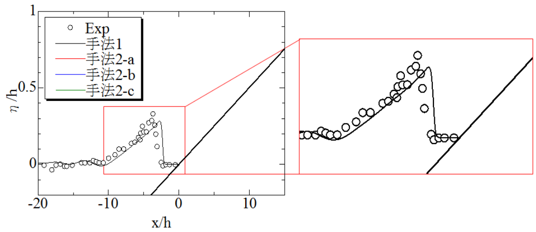
本研究では, 移動境界を考慮した安定化有限要素法による津波解析の高精度化を図るため, 移動境界手法に関する検討を行い以下の結論を得た．

- 手法 2 の結果は, 砕波時において手法 1 に比べて実験値と良い一致を示した．
- 水際線の境界条件として与える流速を大きくとることで, 波が前進することがわかった．

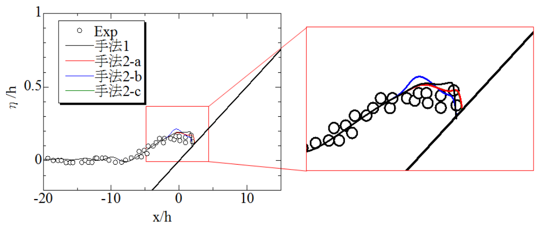
今後の課題として, 更なる移動境界手法の検討, 及び実地形解析が挙げられる．

参考文献

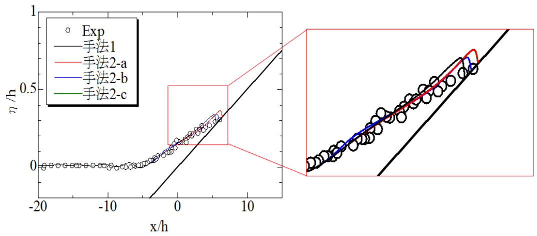
1) T.E.Tezduyar : Stabilized finite element formulation for incompressible flow computations, *Advances in Applied Mechanics*, 28, pp.1-44, 1991
2) M.Kawahara, T.Umetsu : Finite element method for moving boundary problems in river flow, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol.6, pp.365-386, 1986.
3) 松本　純一, 梅津　剛, 川原　睦人 : 陰的有限要素法による浅水長波流れと河床変動解析, 応用力学論文集, Vol.1, pp.263-272,1998
4) C.E.Synolakis : The runup of solitary waves, *J Fluid Mechanics*, *vol*.185, pp.523-545, 1987



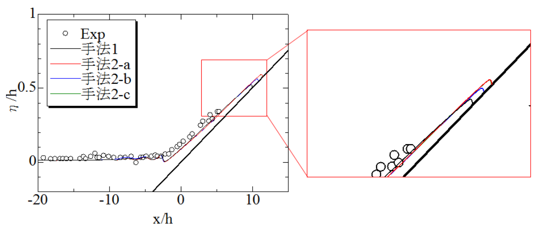
図－４ t'=20 における波形



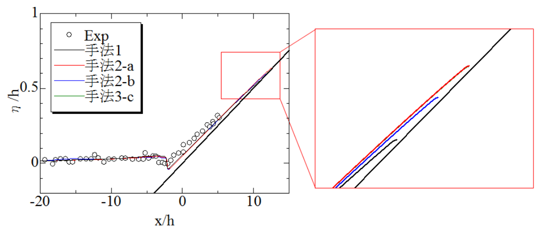
図－５ t'=25 における波形



図－６ t'=30 における波形



図－７ t'=40 における波形



図－８ t'=50 における波形