スペクトル確率有限要素法の地盤変形問題への適用

大成建設(株)　正会員　○堀田　渉
大成建設(株)　正会員　畑　明仁
大成建設(株)　正会員　渡辺　和明

１．はじめに

従来の摂動法に基づく確率有限要素法に代わる手法として，より適用範囲も広く精度の高い R.G. Ghanem and P.D. Spanos[1)]によるスペクトル確率有限要素法（以下，SSFEM）が地盤物性の空間的ばらつきを評価する数値解析手法として提案されている．

本論文では，剛体基礎の沈下問題を対象に，SSFEM の演算精度を確認する目的でモンテカルロシミュレーション（以下，MCS）との比較検証を行うとともに，地盤変形問題への適用性を検討した．

２．SSFEM の概要

SSFEM は, 確率過程を 2 種類のスペクトル分解, すなわち Karhunen-Loeve 展開（以下, KL 展開）と Polynomial Chaos 展開（以下，PC 展開）を用いて，離散的に表現することで有限要素法に適用した解析手法である．

まず，入力物性場（具体的にはヤング率）が確定成分と確率変動成分に分離できるものとする．すなわち $E(x,\omega)=\overline{E}(1+\alpha(x,\omega))$ で表される．ここで，変動成分 $\alpha(x,\omega)$ をガウス場とし，その共分散関数が $C(x_1,x_2)$ と表されるとすると，$\alpha(x,\omega)$ は独立な正規確率変数の級数に展開できる（KL 展開）．一方，ヤング率がガウス分布であっても，一般に境界値問題の解である変位 $u(x,\omega)$ が常にガウス分布になるとは限らない．このため，$u(x,\omega)$ の近似では PC 展開を用いる．PC 展開は，Hermite 多項式を基底として確率場を級数和で近似するものである．

SSFEM の支配方程式は，一般に $[L(x)+\prod(x,\omega)]u(x,\omega)=\varphi(x)$ のように表される．L は確定項に対する演算子，$\prod$ は確率項に対する演算子である．剛性項を確定項と確率項に分けて $D(x,\omega)=\overline{D}(x)+R(x,\omega)$ と置くと，$[L_1(x)\overline{D}(x)+L_2(x)R(x,\omega)]u(x,\omega)=\varphi(x)$ となる．ここで，$R(x,\omega)$ は剛性項の確率変動成分の KL 展開級数である．この偏微分方程式を FEM により離散的に解くために，PC 展開により近似することで $u(x,\omega)$ を算出する．

３．基礎の設計例題に基づく検証

３．１．解析条件

検証に用いた解析モデルを図-1 に示す．本モデルは，ヤング率がランダムに変動する地盤上の剛体基礎の沈下を想定したモデルであり，側方を鉛直ローラー，底面を固定境界とし，基礎に作用する荷重を p=100kN/m^2 としたときの基礎直下における鉛直変位を算出した．ヤング率の期待値とポアソン比については，それぞれ 5MPa，0.4 とした．ヤング率の変動係数 COV$_E$（=期待値/標準偏差），および相関距離（水平 θx，鉛直 θy）については，それぞれの影響を個別に評価するために，独立に変化させて検討した．なお，ヤング率の確率場についてはガウス分布を仮定した．SSFEM の KL 展開および PC 展開の次数はそれぞれ 4 次までとし，MCS の繰り返し回数については 1,000 回とした．

異なる相関距離により発生させたヤング率の確率場を図-2 に示す．メッシュの着色は，KL 展開級数の確率変数に乱数を代

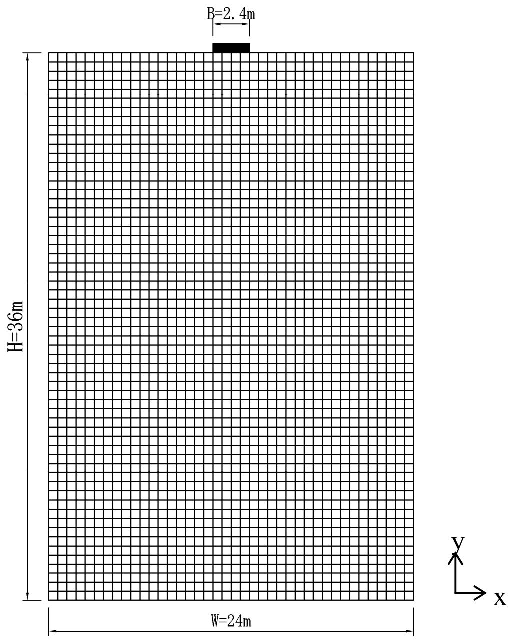

図-1　解析モデル

キーワード　信頼性設計，スペクトル確率有限要素法，Karhunen-Loeve 展開，Polynomial Chaos 展開
連絡先　〒163-0606　東京都新宿区西新宿 1-25-1　大成建設(株)　原子力本部　ＴＥＬ03-5381-5930

入し発生させた 1 サンプルを表示したものである．自己相関構造の違いに応じた不均質性が視覚的に読み取れる．また，相関距離が長くなることにより，ヤング率の変動が緩やかになっていることが分かる．

３．２．解析結果

地表面における鉛直変位を図-3，表-1 に示す．ヤング率が確率的に変動する場合，鉛直変位は左右非対称となる場合も想定されるが，それらの期待値をとると，左右対称の結果となっていることが分かる．また，確定論的な FEM の解とも概ね一致している．ヤング率の変動係数の影響については，変動係数が大きいほど，応答値である鉛直変位の標準偏差も大きくなることが分かる．ここで，鉛直変位の変動係数は，例えば COV_E=0.3 のときは 0.08 となり，COV_E よりも小さい値となる．これは COV_E=0.1，0.2 のときも同様の結果となる．鉛直変位の理論解は，本来ヤング率と反比例の関係にあるため，鉛直変位の変動係数と COV_E が同値となることも考えられる．しかし，これは空間的ばらつきが無い，すなわち相関距離が無限大と仮定した条件である．大竹・本城[2)]は，浅い基礎の沈下量は，地盤物性の局所平均値により支配されるため，Vanmarcke の分散関数に従う分散の低減が生じることを示した．SSFEM を用いた本検証においても，同じ傾向が表現されていることが確認できる．

基礎直下の鉛直変位の確率密度関数を図-4 に示す．相関距離が大きいほど，鉛直変位のばらつきは増加する．MCS による結果と比較すると，相関構造の条件によらず確率分布が良好に一致していることが分かる．なお，SSFEM の確率密度関数は，正規確率変量の値をガウス分布に基づく乱数として 1,000 回発生させ，それらを統計的分布に表したものである．

４．まとめ

本論文では，剛体基礎の沈下問題を挙げ，地盤物性の不確実性を定量的に評価する方法として，SSFEM の適用性を MCS による結果と比較し検証した．その結果，相関構造も考慮された十分な精度を確認することができた．今後の展開としては，地盤の不確実性を扱う他の問題，例えば斜面の安定性評価や断層問題についても検討を行い，SSFEM の適用方法を提案していく．

参考文献

1) R.G.Ghanem, P.D.Spanos: Stochastic Finite Elements -A Spectral Approach-, Dover Publications, Inc., 1991.

2) 大竹雄，本城勇介：地盤パラメータ局所平均を用いた空間的ばらつきの簡易信頼性評価法の検証，土木学会論文集 C，Vol.68，No.3，pp.475-490，2012.

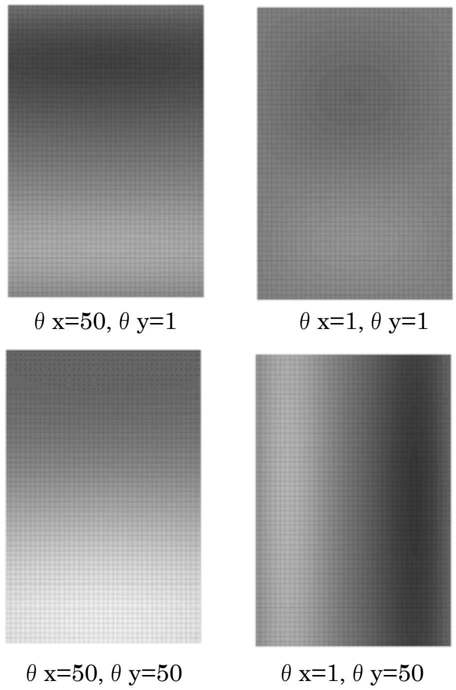

図-2　ヤング率のランダム場（COV_E=0.1）

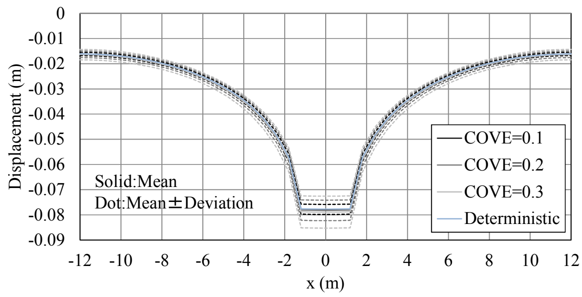

図-3　鉛直変位分布（θx=50, θy=1）

表-1　基礎直下の鉛直変位（θx=50, θy=1）

検討ケース	期待値	標準偏差	変動係数	確定論的な FEMの解
COV_E=0.1	77.8mm	2.0mm	0.03	77.7mm
COV_E=0.2	78.2mm	4.1mm	0.05	
COV_E=0.3	78.9mm	6.3mm	0.08	

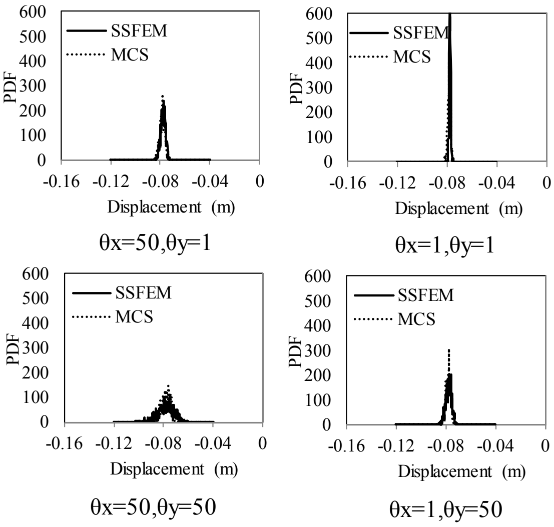

図-4　鉛直変位の確率密度関数（COV_E=0.1）