

混合ハイブリッド FEM を適用した熱伝導・熱応力連成解析の基礎的研究

北海道大学大学院工学院 学生会員 ○工藤 史登
 北海道大学大学院工学研究院 フェロー 蟹江 俊仁
 北海道大学大学院工学院 学生会員 神谷 遼多

1. はじめに

近年、凍上を伴う構造物や土木技術が注目を集めている。例として、災害時のリスクを軽減するため、LNGタンクなどの低温構造物の埋設や、都市圏の地下にライフライン網を築くための地盤凍結工法、福島第一原子力発電所における遮水用凍上壁が挙げられる。このように、凍上を伴う構造物や工学的技術が利用される中、凍上現象の解析精度の向上が重要であると言える。

凍結凍上解析は、熱伝導解析と力学的解析大きく分けられる。つまり、解析精度を高めるためには、両解析でそれぞれに適した手法で計算することが望ましいと考えられる。我々はこれまで熱伝導解析、力学的解析共に有限要素法(以下、FEM)を用いてきた。FEMは要素の節点上に目的変数を定義するため、節点における変位や要素内の応力を算定する場合、力学的解析は十分な精度を誇る。しかし、熱伝導解析では、FEMは各要素境界を流出入する熱流量を直接評価できないため、熱量管理の点で精度に疑問が残る。そこで、凍結潜熱を伴う要素の相変化問題を扱う際には、熱伝導解析において、要素境界に熱流量を定義することにより、熱量の評価に優れた混合ハイブリッド FEM(以下、MHF)を用いることで解析の精度が高まると考える。¹⁾

以上から、本研究では熱伝導解析に MHF、力学的解析に FEM を適用した一次元解析モデルを構築し²⁾、従来の FEM のみの解析結果と比較することで計算精度への影響を検討する。

2. 解析手法

MHF の大きな特徴として、要素の境界を流出入する熱流量と、要素温度を直接計算できることが挙げられる。要素温度は、要素の凍結評価において重要なファクターである。また、FEM と MHF では、熱伝導解析に用いる式が異なる。FEM における熱伝導解析は、式(1)に示す非退化形式の熱伝導方程式を離散化する。

$$\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

λ :熱伝導率 ρ :密度 c :比熱 θ :温度 t :時間
 式(1)を離散化すると、熱伝導方程式は式(2)のように表せる。

$$[C] \left\{ \frac{\partial T}{\partial t} \right\} + [D] \{T\} = 0 \quad (2)$$

[C]:熱容量マトリクス [D]:熱伝導マトリクス
 T:節点温度

一方、MHF における熱伝導解析は、式(3)、(4)に示す混合形式の熱伝導方程式を離散化する。

$$\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} = -q \quad (3)$$

$$\frac{\partial q}{\partial x} = -\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (4)$$

λ :熱伝導率 θ :温度 q :熱流束 ρ :密度 c :比熱 t :時間
 式(3)はフーリエ則、式(4)は熱量の保存則を表している。式(3)、(4)を離散化し、一つのマトリクスにすると熱伝導方程式は式(5)のように表される。

$$[M] \begin{Bmatrix} Q_k \\ T_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \lambda T_i \\ \rho c L \frac{\partial T_k}{\partial t} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

[M]:熱伝導マトリクス Q_k :要素境界での熱流量
 L:要素長 T_k :要素代表温度 T_i :境界温度

上記の式(2)、(5)を用いて熱伝導解析を行う。両手法ともに時間の離散化にはクランク・ニコルソン法を適用した。なお、FEM における要素代表温度は、節点の平均値から求めることとした。また、解析結果の比較のため、式(6)で表される理論解を用いて解析精度を確認する。

$$T = T_s + (T_i - T_s) \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} \right) \quad \left(\alpha = \frac{\lambda}{\rho c} \right) \quad (6)$$

T_s :境界温度 T_i :初期温度 x :位置 t :時間
 λ :熱伝導率 ρ :密度 c :比熱

力学的解析には、式(8)で表される FEM を用いる。

$$[K] \{u\} = \{f_T\} + \{f_E\} \quad (8)$$

[K]:要素剛性マトリクス u :節点変位
 f_T :熱応力により発生する力 f_E :弾性力

なお、熱応力により発生する力は、式(9)から計算することができる。

キーワード FEM, 混合ハイブリッド FEM, 熱伝導・熱応力連成解析, 定性的評価

連絡先 〒060-8628 北海道札幌市北区北 13 条西 8 丁目 北海道大学大学院工学院 TEL011-706-6177

$$\{f_T\} = EA\alpha\{\Delta T\} \quad (9)$$

E:弾性係数 A:断面積 α :線膨張係数 ΔT :温度変化式(9)から熱応力により発生する力を求め、式(8)に代入することで節点変位を求めることができる。

4. 解析モデルと解析条件

本研究では熱伝導・熱応力連成解析問題における、カップリングモデルの解析精度を検討する。そこで、温度変化によって、力学的挙動が変化する解析モデルを設定する。今回は図-1 に示される地中に埋められた LNG タンクを想定し、その底面部における熱伝導・熱応力連成解析を行った。今、各要素の初期温度をすべて 0°Cとし、境界条件として底面上部の節点温度を -100°C、底面下部の節点温度を 0°Cで固定したときの鉛直方向への温度変化と内部応力変化の分布を、一次元モデルで解析した。計算条件および物性値は、解析結果の差異を定性的に見るためすべて 1 とした。

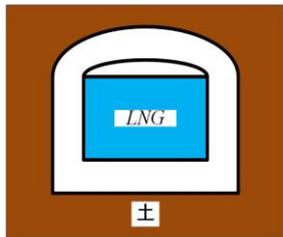


図-1 解析モデル

表-1 物性値

密度 ρ [kg/m ³]	1
比熱 c [J/kg · K]	1
熱伝導係数 λ [W/m · K]	1
ヤング率 E [GPa]	1
線膨張係数 α	1
断面積 A [m ²]	1
要素長 L [m]	1

5. 解析結果

解析結果をグラフに示す。図-2 は時間と要素の温度、図-3 は $t=1$ における各要素の温度、図-4 は時間と応力の関係を示したグラフである。破線が FEM, 実線が MHF, 点線が理論値による解析結果を示している。図-2 より、FEM を用いた解析結果と MHF による解析結果を比較すると、初期の時間帯で結果に違いがみられる。特に、FEM による解析では、境界条件を与えた底面上部の要素における温度、内部応力の曲線が最初期の時間帯に急激に変化している。また、理論解による解析結果と MHF の解析結果の挙動が類似している。図-2, 図-4 においては、温度が下降していく遷移状態では明らかに違いが発生するものの、時間が経過した定常状態では、温度、応力両方の解析結果は同じ値に収束することがわかる。また、図-3 からは、MHF の温度分布や温度変化の遷移過程が、理論解とほぼ一致していることが分かる。

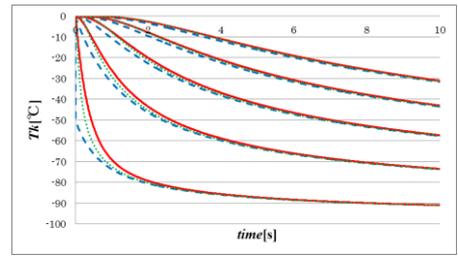


図-2 時間と要素温度

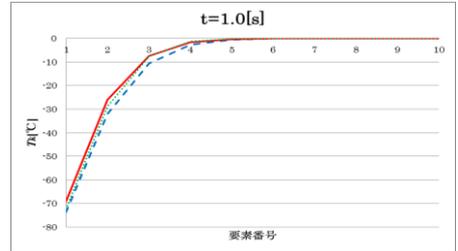


図-3 要素番号と要素温度

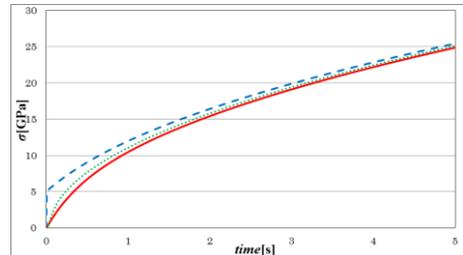


図-4 時間と内部応力

6. まとめ

図-2 において、FEM では要素の代表温度を節点の平均値からとっているため、境界条件を与えた節点を含む底面上部の要素では突然温度が上昇している。加えて、熱量の評価を厳密に行える MHF を熱伝導解析に適用することにより、要素の温度変化の遷移過程が変化し、その結果、図-4 の力学的解析においても影響を及ぼしていることが考えられる。また、凍結を伴う問題では、遷移過程における温度変化の違いが、凍結評価に大きな影響を及ぼすため、理論解との挙動が一致している MHF の方が、より厳密な凍結評価ができると考えられる。

以上から、熱伝導・熱応力連成解析における、FEM のみの解析と結果とカップリング解析結果の差異を定性的に示すことが出来た。今後の研究では、極座標を適用した一次元モデルや二次元モデルを用いて、より実用的な解析を行っていきたい。

参考文献

- 1) Akito Ueda, Yuto Ishida, Shunji Knie: Effect of Elemental Shape and Modeling of Mixed Hybrid FEM on Numerical Solution, The 2nd International Conference on Sustainable Civil Engineering Structures and Construction Materials, Vol.95, 2014
- 2) 大村健祐, 工藤史登, 蟹江俊仁: 相変化潜熱の評価精度向上対策と混合ハイブリッド FEM への適用, 土木学会北海道支部平成 26 年度論文報告集 第 71 号