

連続群論による相似変換を用いた堤防内の浸潤面に関する 非線型偏微分拡散方程式の解析手法の提案

中央大学大学院 学生会員 〇劉 佳
中央大学 フェロー会員 山田 正

1. はじめに

自然現象を説明するような微分方程式が広く応用されている。例えば熱伝導問題、境界層問題などに用いられている。線型微分方程式の解法は、フーリエ変換法、ラプラス変換法などがあるが、非線型微分方程式は厳密に解くことは困難であり、現在、非線型微分方程式に対して数値解析を用いて解くことが一般的な手法である。しかし、非線型微分方程式を解析的に解くことは数学の分野では1つの大きなトピックスであり、現在も精力的に研究が行われている。非線型偏微分方程式を解析的に解く方法の1つに相似変換を用いる方法がある。相似変換の手法は大きく分けて4つあり、自由パラメータ法、変数分離法、連続群論法、次元解析法である。そのうち、連続群論法によるアプローチは高度な群論の知識が要求される手法であり、著者の知る限り応用例があまりない。その為、本研究は、連続群論のアプローチによる相似変換を用い、一般的な偏微分方程式の解を求める手法を提案し、堤防内の浸潤面に関する拡散方程式を1つの例としてこの手法を適用した。

2. 手法

本研究で提案する手法は、連続群論のアプローチによる相似変換を用い、偏微分方程式を常微分方程式に変換した。解析解が求められない常微分方程式に対し数値解析を行い、求めた数値解に良く適合する関数形を探し、元の偏微分方程式の解を求めた。本研究では、この解を実用解と呼ぶ。

2.1 連続群論法に基づく相似変換の手法

まず、連続群論法に基づく相似変換の手法について簡単に説明する。

定義1: ある連続関数の集合は $Z^i = f^i(z^1, z^2, \dots, z^m; a)$ である。パラメータ a に依存する変数変換を用い、変数 $z^1, z^2, \dots, z^m$ を変数 $Z^1, Z^2, \dots, Z^m$ に変換できる。ここで、 $Z^i = f^i(z^1, z^2, \dots, z^m; a)$ を連続変換群と呼ばれる。

定義2: ある関数 $g(z^1, \dots, z^m)$ に対して、変換 $Z^i = f^i(z^1, z^2, \dots, z^m; a)$ を行い、もし関数 g の形式が変わらなければ(つまり以下の式を満たす)、 g は変換 Z^i に対して、不変である。

$$g(z^1, \dots, z^m) = g(Z^1, \dots, Z^m)$$

定義3: ある微分方程式:

$$\phi_j \left(x^1, \dots, x^m, u^1, \dots, u^n, \frac{\partial^k u^1}{\partial (x^1)^k}, \dots, \frac{\partial^k u^n}{\partial (x^m)^k} \right) = 0$$

に対して、変換

$$X^i = f^i(x^1, x^2, \dots, x^m; a) \quad (X^i, x^i \text{ は独立変数})$$

$$U^j = h^j(u^1, u^2, \dots, u^n; a) \quad (U^j, u^j \text{ は従属変数})$$

を行う。もし微分方程式の形式が変わらなければ(つまり以下の式を満たす)、微分方程式 $\phi_j = 0$ は、 X^i, U^j に対して、不変である。

$$\phi_j \left(x^1, \dots, x^m, u^1, \dots, u^n, \frac{\partial^k u^1}{\partial (x^1)^k}, \dots, \frac{\partial^k u^n}{\partial (x^m)^k} \right) = 0$$

$$\phi_j \left(X^1, \dots, X^m, U^1, \dots, U^n, \frac{\partial^k U^1}{\partial (X^1)^k}, \dots, \frac{\partial^k U^n}{\partial (X^m)^k} \right) = 0$$

以上の定義より、ある微分方程式

$$\phi_j \left(x^1, \dots, x^m, u^1, \dots, u^n, \frac{\partial^k u^1}{\partial (x^1)^k}, \dots, \frac{\partial^k u^n}{\partial (x^m)^k} \right) = 0$$

は変換

$$X^i = f^i(x^1, x^2, \dots, x^m; a) \quad (X^i, x^i \text{ は独立変数})$$

$$U^j = h^j(u^1, u^2, \dots, u^n; a) \quad (U^j, u^j \text{ は従属変数})$$

に対して、不変であれば、元の微分方程式 $\phi_j = 0$ の解は以下の新しい微分方程式 $\Phi_j = 0$ の解で表せる。

$$\Phi_j \left(\eta^1, \dots, \eta^{m-1}, F^1, \dots, F^n, \frac{\partial^k F^1}{\partial (\eta^1)^k}, \dots, \frac{\partial^k F^n}{\partial (\eta^{m-1})^k} \right) = 0$$

$\Phi_j = 0$ の独立変数は $\phi_j = 0$ のより1つ減り、 η^i, F^j は以下の式を満たす、

$$\eta^i = \eta^i(x^1, x^2, \dots, x^m) \\ F^j(\eta^1, \eta^2, \dots, \eta^{m-1}) = g^j(x^1, x^2, \dots, x^m, u^1, \dots, u^n)$$

関数 η^i, g^j は変換 X^i, U^j に対して不変である。

この手法は、Birkhoff¹⁾, Morgan²⁾, Hansen³⁾, Ames⁴⁾がLieとEngelが作った基礎理論に基づき、研究し、現在の連続群論のアプローチを得た。

次に、偏微分方程式を常微分方程式に変換し、常微分方程式に対して数値解析を行い、この数値解に良く適合する関数を探し、実用解を求める。

2.2 非線型偏微分拡散方程式の実用解

堤防内の浸潤面を求める基本式を以下に示す。

$$\text{基本式: } \frac{\partial h}{\partial t} = k_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial h}{\partial x} \right) \quad (1)$$

$$\lambda: \text{空隙率} \quad k: \text{透水係数} \quad k_0 = \frac{k}{\lambda}$$

定義1により、各変数を次のように変換すると、

キーワード: 堤防内の浸潤面 連続群論法 相似変換 非線型偏微分拡散方程式

連絡先: 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 中央大学理工学部 TEL03-3817-1807

$$\tilde{x} = a^\alpha x \quad \tilde{t} = a^\beta t \quad \tilde{h} = a^\gamma h \quad (2)$$

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{t}} - a^{2\alpha-\gamma-\beta} k_0 \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left(\tilde{h} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}} \right) = 0 \quad (3)$$

連続群論のアプローチが使えるためには,

$$2\alpha - \beta - \gamma = 0 \quad (4)$$

を満たさなければならない。(4)式の関係が成り立てば、(1)式は変換(2)式に対して不変である。そして、

$$\phi \left(x, t, h, \frac{\partial^k h}{\partial (x)^k}, \dots, \frac{\partial^k h}{\partial (t)^k} \right) = \Phi \left(\eta, F, \frac{\partial F}{\partial (\eta)}, \dots, \frac{\partial^k F}{\partial (\eta)^k} \right) = 0$$

が成立する。 η, F は以下の性質を満たす。

$\eta(x, t), g(x, t, h)$ は変換(2)式に対して不変である。

$$\eta = \eta(x, t) \quad F(\eta) = g(x, t, h) \quad (5)$$

$$\eta(x, t) = \eta(\tilde{x}, \tilde{t}) = x t^p = \tilde{x} \tilde{t}^p \quad (6)$$

$$g(x, h) = h t^q = \tilde{h} \tilde{t}^q \quad (6)$$

(2)式を(5)、(6)式に代入すると、 $p = -\frac{\alpha}{\beta}$ $q = -\frac{\gamma}{\beta}$ より

$$\eta = x t^{\frac{\alpha}{\beta}} \quad (7)$$

$$F(\eta) = h t^{\frac{\gamma}{\beta}} \quad (8)$$

(7)、(8)式を(1)式に代入すると、 $2\alpha - \beta - \gamma = 0$ より、

$$\frac{\gamma}{\beta} F(\eta) - \frac{\alpha}{\beta} \eta \frac{dF(\eta)}{d\eta} = k_0 F(\eta) \frac{d^2 F(\eta)}{d\eta^2} \quad (9)$$

以上より、群論のアプローチによる相似変換を用い、非線型偏微分方程式を非線型常微分方程式に変換した。次に、(10)式に示す元の方程式の初期条件と境界条件を(11)式に変換するために、 $\gamma = 0$ と置く。

$$h(x, 0) = 0 \quad h(0, t) = 1 \quad h(\infty, t) = 0 \quad (10)$$

$$F(0) = 1 \quad F(\infty) = 0 \quad (11)$$

$$\frac{d^2 F(\eta)}{d\eta^2} = -\frac{\eta}{2k_0 F(\eta)} \frac{dF(\eta)}{d\eta} \quad (12)$$

$\gamma = 0$ より、 $p = -\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{1}{2}$ である。

$$\eta = \frac{x}{\sqrt{t}} \quad (13)$$

(12)式の k_0 を消去するために、 $\eta = \frac{x}{\sqrt{4k_0 t}}$ と置くと、(12)式

は以下ようになる。

$$\frac{d^2 F(\eta)}{d\eta^2} = -\frac{2\eta}{F(\eta)} \frac{dF(\eta)}{d\eta} \quad (14)$$

(14)式は非線型常微分方程式なので、解析解が求められない。(11)式に示す初期条件と境界条件を用い、数値解析を行い、(14)式の数値解を求めた。さらに、求めた数値解に良く適合する関数形の1つを(15)式に示す。

$$F(\eta) = \text{Exp} \left[-0.86 \frac{\eta}{\sqrt{0.81 - \eta}} \right] \quad (15)$$

相似変換による、非線型常微分方程式の相似解(15)式を非線型

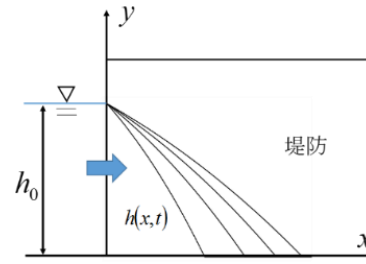


図-1 堤防内の浸潤面イメージ図

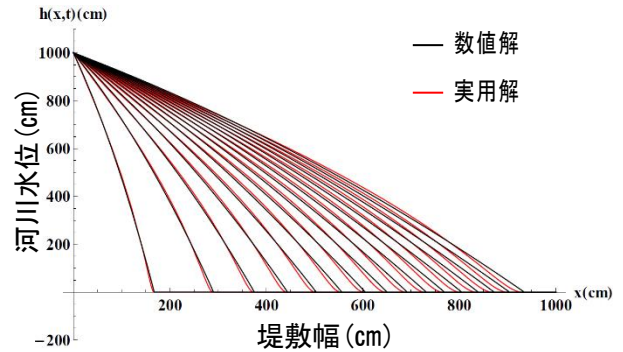


図-2 堤防の浸潤面問題に用いる
非線型拡散方程式の実用解と数値解の比較

偏微分方程式の解(16)式に変換すると、(16)式を実用解と呼ぶ。

$$\frac{h(x, t)}{h_0} = \text{Exp} \left[-0.86 \frac{\eta}{\sqrt{0.81 - \eta}} \right] \quad (16)$$

ただし、 $\eta = \frac{x}{\sqrt{4k_0 h_0 t}}$ である。

3. 計算結果

計算条件は、水深 $h_0 = 10\text{m}$ 、浸透時間 $t = 96\text{h}$ 、透水係数 $k = 0.001\text{cm/s}$ 、空隙率 $\lambda = 0.4$ 。堤防内の浸潤面に関する非線型拡散方程式の実用解と数値解を比較した結果を図-2に示す。実用解と数値解は良く合っているが、浸潤面の下部では少し離れている。

4. まとめ

本研究では、連続群論のアプローチによる相似変換を用い、一般的な偏微分方程式の実用解を求める手法を提案した。得られた知見を以下の様に示す。

- (1) 連続群論のアプローチによる相似変換を用い、自動的に偏微分方程式を常微分方程式に変換することができた。
- (2) 解析解が求められない偏微分方程式に対して毎回数値解析を行わず、実用解を得ることで、簡単に偏微分方程式の解が得ることができる。
- (3) 常微分方程式の数値解に良く合う関数型は様々である。

謝辞：本研究は科研費基礎研究(A)「可能最大洪水に対応できる数理科学的な河川計画手法の確立」(代表者、山田正)の支援を受けて、行われたものである。記して謝意を表す。

参考文献

- (1) Birkhoff, G., Hydrodynamics, Princeton University Press (1950)
- (2) Morgan, A.J.A., "Reduction by One of the Number of Independent Variables in Some Systems of Partial Differential Equations", Quar.Appl.Math., Vol.3, pp.250-259 (1952)
- (3) Hansen, A.G., Similarity Analyses of Boundary Value Problems in Engineering, Prentice-Hall Inc. (1964).
- (4) Ames, W. F., Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering Vol.1, Academic Press, New York (1965).