一次元不定流計算の計算精度に関する研究

中央大学大学院　　学生会員　○矢本　貴俊
中央大学　　　フェロー会員　　山田　正

1. はじめに

一次元不定流の数値計算は古くから行われており,洪水解析の手法の一つとして確立されている.日本における最も長い河川で全長約360 kmである信濃川を例に見るように,従来の不定流計算は数百 km の河川長を計算することが一般的であった.また,世界的に見ても数千 km の河川における不定流計算は必要な区間だけに焦点をおいて不定流計算を行うため,同様に数百 km 規模の計算が一般的であった.しかし,近年,環境問題が注目され,地球規模のシミュレーションが行われている.地球温暖化を例に見ると,蒸発,降雨,洪水,地下水といったあらゆる水循環の要素を計算する必要があるが,すべてを計算するためには長江のような 6000 km 級の河川も丸ごと計算する必要がある.そのため, 現代においては数千 km の河川を計算しなければならない.長距離河川の場合,保存率に数%の誤差があっても流量に換算すると大きな値になる.そのため,保存率に注目し,本研究では河川長が約 6000 km である中国の長江を想定して一次元不定流計算を行い,流入量・流出量から求まる体積の保存率を指標として計算精度を検討した.

2. 基礎方程式

一次元不定流の基礎方程式として, Saint-Venant による基本式を用いた.以下の式(1)と式(2)はそれぞれ,連続式と運動量方程式である.

$$\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial x}=0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{\partial\left(Q^2/A\right)}{\partial x}+gA\frac{\partial h}{\partial x}-gA\left(I_0-I_f\right)=0 \tag{2}$$

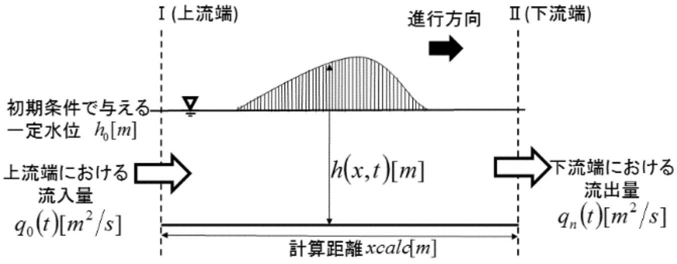
ここに,A:断面積[m^2],Q:流量[m^{3}s^{-1}],t:時間[s],x:位置[m],g:重力加速度[ms^{-2}],I_0:河床勾配,I_f:摩擦勾配である.以下に示す式(3)は Manning の平均流速公式である.本研究では広幅矩形断面の開水路を想定するため,壁面に働く摩擦量は十分に小さいと仮定する.よって,水理学的径深は水深 h に近似することができる.

$$v=\frac{1}{n}h^{2/3}\sqrt{I_f} \tag{3}$$

上式の各記号が表す意味は, v:流速[ms^{-1}],B:河川幅[m],h:水深[m],q:単位幅流量[m^{2}s^{-1}],n:粗度係数 [m$^{-1/3}$s]である.本研究では流下方向に一様な河道断面を設定するため等流状態に近似して考えることができ,I_f=I_0が成り立つ. 式(1)と式(2)を,$A=Bh,Q=vA,q=Q/B$ の関係および,式(3)を用いて変形すると,それぞれ式(4)と式(5)になる.

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial q}{\partial x}=0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial q}{\partial t}+\frac{\partial(qv)}{\partial x}+gh\frac{\partial h}{\partial x}-ghI_0+g\frac{n^2q|q|}{h^{7/3}}=0 \tag{5}$$



図−1. 河川全体の流入出量算定の概念図

3. 数値計算手法

本研究における数値解析手法には,安定的に計算を行うために時間に関して1次精度前進差分,移流してくる物理量による影響を表現するために空間に関して 1 次精度後退差分を用いる.この差分法および,安定的に計算を行うスキームである Semi-Implicit スキームにより水深 h と単位幅流量 q を計算する. また,体積保存率の評価方法を以下に記す. 図−1 に示すように,計算区間内の任意の点の水深は h_i [m]であり,定常状態における水深は h_0 [m]である.上流端における各タイムステップにおける単位幅流入量は q_0 [m^{2}s^{-1}],下流端における単位幅流出量は q_n [m^{2}s^{-1}]である.体積の増減の収支は,(上流端における総流入量[m^3])=(計算区間全体の体積増加量[m^3])+(下流端における総流出量[m^3])であり,数式で表すと式(6)である.上流端総流入量と下流端総流出量は各境界における単位幅流量を時間積分して求める.また,計算区間全体の体積増加量は図−1 における斜線部分であり,計算区間内の各点における水深を空間積分し,定常状態における体積との差を用いることにより算定する.

$$\int_0^{tcalc}q_0(t)dt=\int_0^{xcalc}h_i(x)dx+\int_0^{tcalc}q_n(t)dt \tag{6}$$

河川全域の体積保存率は, 式(6)の 3 つの項を用いて以下の式(7)より算定する.

$$\varepsilon_r=\left\{1-\frac{\sum_{j=0}^{m}q_0^j\Delta t-\left(\sum_{i=0}^{n}h_i^j\Delta x+\sum_{j=0}^{m}q_n^j\Delta t\right)}{\sum_{j=0}^{m}q_0^j\Delta t}\right\}\times 100\% \tag{7}$$

4. 境界条件および初期条件

本研究の数値計算のために設定した河川は,中上流河川を想定した代表的な値として,全区間で河床勾配 1/10000,河川幅 3000m,Manning の粗度係数 0.02 を与えた.初期条件としては,上流端境界において一定流量を,下流端境界条件に一定水深を与え,定常状態の各地点における水深および流量の値を河川全域に対して与えている.境界条件は,上流端境界条件として上流からの洪水波の入射を表現するためにタイムステップごとに変化する以下の式で示す流量を与えている.

キーワード　一次元不定流,保存率,Semi-Implicit スキーム
連絡先　〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 中央大学理工学部 TEL.03-3817-1805　E-mail:yamoto@civil.chuo-u.ac.jp

$$Q_0(t) = Q_b + (Q_p - Q_b)\left(\frac{t}{t_p}\exp\left(1-\frac{t}{t_p}\right)\right)^C \tag{8}$$

上式の各記号の表す物理量は,Q_b：基底流量[m^3s^{-1}], Q_p：ピーク流量[m^3s^{-1}], t_p：ピーク時間 [hour], C：定数である.これらの値は, Q_b = 3000 m^3s^{-1}, Q_p = 30000 m^3s^{-1}, t_p = 15 hour, C = 20 を与える.ピーク前後の流量は基底流量になる.また,流量の時間変化は流量が増加してからピーク流量に達し,基底流量へ減少するまで約 1 日かかる.上流端において,設定した格子点を使って計算ができるように水深は擬似的に等流水深を与える.時間の刻み幅は Δt=300 s，空間の刻み幅 Δx=2000 m とする．計算距離は長江を想定して *xcalc*=6000 km とし,計算時間は *tcalc* =1500 hour (約 9 週間)とする.

5. 計算結果および考察

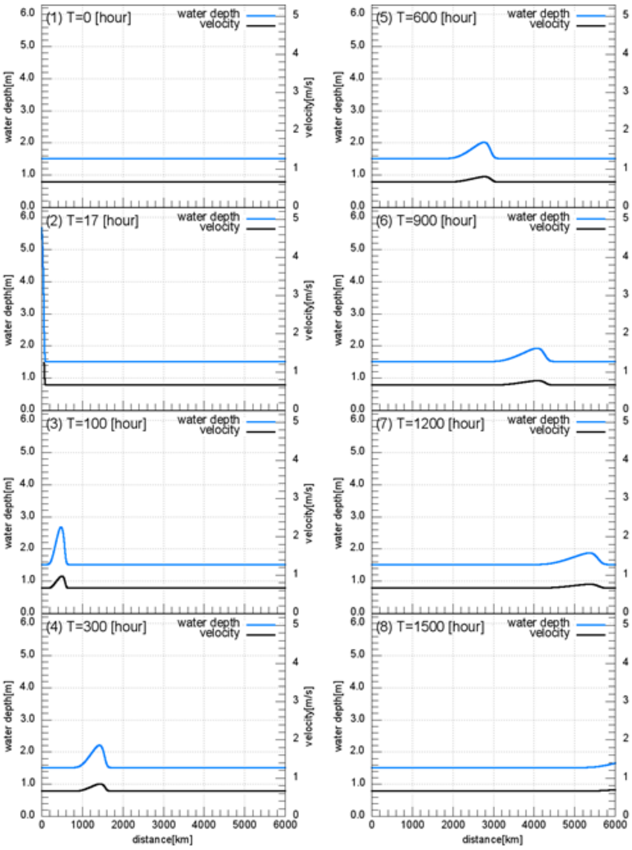
一次元不定流計算による数値計算結果を**図–2** に示す. 横軸は距離を表し, 左端が上流端, 右端が下流端である. そして縦軸は左軸が水深[m], 右軸が流速[ms^{-1}]である. t=0 hour において水深は一様であったが, t=17 hour では上流端から流量の増加分が入ってきており, 水深変化は時間とともに流下方向に伝播している. 各時間における水深および流速を見ると, 水深の空間的なピーク地点において流速もピーク値を示している. このことは, ピーク前面においては流速差により空間に対する水深勾配が時間とともに急になり, ピーク背面においては水深勾配が緩やかになることを示している. これは, 実現象として洪水流がある地点に到達した際に急激に水深が増加することに対し, 水深が基底流量まで戻るまでには時間がかかることを表している. また, 水深変化の山の空間的幅は時間とともに広がっている. t=1500 hour では水深変化がほぼ下流端に到達し, 水深はほぼ一様である. このことから, 洪水流が上流端から入り, 下流端に到達するまでには約 9 週間かかることがわかる. **図–3** は体積保存率とクーラン数の時間変化である. **図–3** より, 保存率の最小値は, t=75 hour で 99.998%である.ゆえに小数点以下二桁のオーダーでしか誤差が生じていないことが読み取れる.ゆえに, 計算距離が 6000 km の長距離河川を対象に一次元不定流計算を行った結果高い精度で保存されていることがわかる. t=75 hour で保存率が最小の値を示しているが,同じ地点のクーラン数は最大値を示している. クーラン数は以下の式(9)であるが,時間的・空間的刻み幅は一定値を与えているため,クーラン数の変化は流速の変化と一対一対応している.

$$c = v\Delta t/\Delta x \tag{9}$$

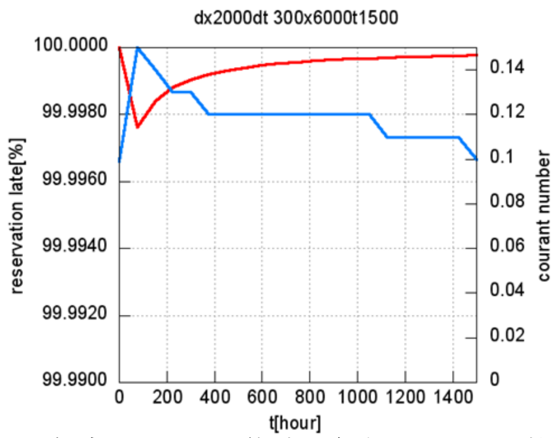
そのため, t=75 hour では流速が最大値を示しており, 上流端に洪水波が到達していることを表す.誤差がほかの時刻に比べて大きい理由は,空間的な水深勾配が最も大きいため,空間的な刻み幅に起因して生じる誤差が大きくなることが考えられる.

6. まとめ

本研究で得られた知見を以下に示す. 中国の長江を想定して河川幅が 3km, 河川長が 6000km の河川を対象に一次元不定流計算を行った結果, 高い精度で体積が保存されることがわかった. これは, Saint-Venant の基礎方程式が物理量を保存する式であることを 6000km 河川で計算して示したことになる. 今後, 大規模な河川網を対象に一次元不定流計算を行ったとしても, 単一河川の計算においては体積が保存するであろうことを示しており, 大規模河川網の不定流計算を行うにあたっての一つの可能性となる結果が得られた.



図–2. 水深・流速の時間変化



図–3. 各時間における体積保存率とクーラン数

謝辞

本研究は科研費基礎研究（A）「可能最大洪水に対応できる数理科学的な河川計画手法の確立」（代表者, 山田正）の支援を受けて, 行われたものである. 記して謝意を表す.

参考文献

(1) 手計 太一，吉谷 純一，スヴァンピモル チャンチャイ [他]，宮本 守，山田 正：MIKE11 を利用したタイ王国・Chao Phraya 川流域水循環モデルの構築とその検証，水文・水資源学会誌 = JOURNAL OF JAPAN SOCIETY OF HYDROLOGY & WATER RESOURCES 19(3), 212-220, 2006-05-05
(2) 日野幹夫：「明解　水理学」，丸善
(3) 吉川秀夫：「水理学」，技報堂
(4) 「水理公式集[平成 11 年版]」，土木学会