

ラグランジュ的方法による1次元不定流の数値計算手法と境界条件の検討

中央大学大学院 学生会員 ○小石 一字
 中央大学大学院 学生会員 成 岱蔚
 中央大学 フェロー会員 山田 正

1. はじめに

流体の記述の仕方にはある固定点で流体の状態量を記述する Euler 的方法と、ラベル付けした任意の流体粒子を追跡する Lagrange 的方法がある。Lagrange 的方法による数値計算手法は、流体粒子の座標が正確に分かること、水面形の急変部を精度良く表現できることといった利点もある一方で、2次元以上の計算になると Navier-Stokes 方程式に本来無いはずの反発力を粒子間に計算安定化のために加えるため、粒子の追跡能力を失うこと、また、流入・流出境界のある問題の処理の仕方に関する課題を抱えている。

本研究では以上に示す Lagrange 的方法による数値計算手法の課題克服に向けて、流体粒子の追跡能力の残された流入境界を有する 1 次元不定流の数値計算をベースに、Lagrange 的方法による数値計算手法を示した上で、Lagrange 的方法と Euler 的方法の手法の違いによる関係性を調べた。

2. Lagrange 的方法による1次元不定流の数値計算手法

2.1 Lagrange 的方法による基礎式の離散化

一様広幅矩形水路における Lagrange 的方法による 1 次元不定流の連続式と運動量方程式を以下に示す。

$$\frac{Dh}{Dt} + h \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{Dq}{Dt} + q \frac{\partial v}{\partial x} = -gh \frac{\partial h}{\partial x} + ghi_0 - ghl_f \quad (2)$$

ここに、 h : 水深[m], q : 単位幅流量[m²s⁻¹], v : 断面平均流速[ms⁻¹], g : 重力加速度[ms⁻²], i_0 : 河床勾配, l_f : エネルギー勾配, D/Dt : 実質微分である。これより(1)式と全く等価な離散化式を導出する。図-1 は、簡略化した水面形のイメージ図であり、縦方向に水深、横方向に距離を表している。図-1 に示すように、1-2 間で検査体 (以下、流体セルと呼ぶ)を設定する。 $t=t_0$ のときの着目する流体セルのボリュームと、 $t=t_0+\Delta t$ のときの流体セル(1'-2'間)のボリュームが質量保存則により等しいため、Lagrange 的に見たときの連続式の離散化式は、単位幅断面を仮定すると、

$$h \cdot \Delta x = Const. \quad (3)$$

と置ける。(2)式の離散化式も同様に、水深 h を単位幅流量 q に置き換えて考えると、運動量保存則より、

$$\Delta(q \cdot \Delta x) = (-gh \frac{\partial h}{\partial x} + ghi_0 - ghl_f) \Delta x \cdot \Delta t \quad (4)$$

を得る。(4)式は運動量の時間的変化は力積であると見なせるため質点系の力学における Newton の第 2 法則と同

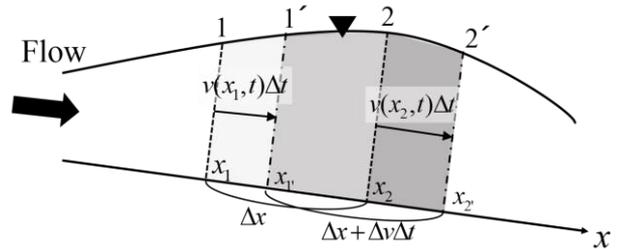


図-1 Δt間に移動する流体セルのイメージ図

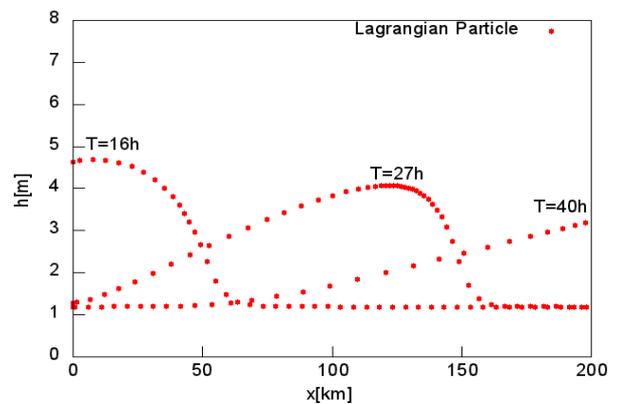


図-2 Lagrange 的方法による1次元不定流の解の波形、Δxが伸縮しながら移流している(Δt=72s, 初期Δx=5km)

じ形をしていることが分かる。(3)(4)式は物理的解釈に基づいた Lagrange 的な離散化式である。

2.2 流入境界の処理

Lagrange 的方法による数値計算において境界から flux が流入している非定常の境界値問題を解く際には、流入境界近傍で新たに計算点を生成させなくてはならない。本研究では上で示した物理的解釈に基づく離散化手法における流入境界の処理手法を提案する。

本研究では、上流端で流量ハイドログラフとそれに応じた等流水深を境界条件として与えた。図-1 に示すように、 $t=t_0$ から $t=t_0+\Delta t$ まで時間が進んだとき、各計算点の座標は(5)式となる。ここで、本手法では上流端のみ常に Euler 的に固定座標として見ているため、上流端の座標は常に 0 である。(3)式において上流端の 1 つ目の流体セルには流入流量に応じた質量 flux ((4)式の場合は運動量 flux)を Δt 毎に流入させる。上流端より 1 つ目の流体セルのボリュームが初期の流体セルのボリュームより大きくなったとき、(3)より(6)式に示すように、上流端で座標を生成し、残りの座標のラベルを更新する処理を行った。

キーワード Lagrange 的方法, 1 次元不定流, 流入境界, 計算精度

連絡先 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 中央大学理工学部 TEL03-3817-1807

また、発散防止のため(6)式に示す座標が任意の Δx よりも大きい場合には座標を生成しない改良を施した。

$$x_i(t + \Delta t) = x_i(t) + v_i(t)\Delta t \quad (5)$$

$$x_1^{new} = (h_1^{t+\Delta t} \cdot x_1^{t+\Delta t} - h_1^0 \cdot x_1^0) / h_1^{t+\Delta t} \quad (6)$$

2.3 計算結果

図-2 に計算結果を示す。日本の河川の中流域を仮定して川幅 200m の長方形断面、勾配 1/2000、長さ 500km、粗度係数 0.03 の一様河道を設定した。初期条件は流量に基底流量 $200\text{m}^3\text{s}^{-1}$ 、水深に基底流量に対する等流水深を与え、境界条件は上流端で次式に示すピーク流量 $2000\text{m}^3\text{s}^{-1}$ 、ピーク時間 15h の 1 山の流量ハイドログラフと、その流量に対応する等流水深を与えた。連続式と運動量方程式のそれぞれに初期条件と上流端で境界条件を 1 つずつ与えているため、下流端では境界条件を与えていない。結果は 16h, 27h, 40h 後の水面形を上流から 200km の区間で表示している。

$$q(t) = \frac{Q_{base}}{B} + \frac{(Q_{peak} - Q_{base})}{B} \left\{ \frac{t}{15} \exp\left[1 - \frac{t}{15}\right] \right\}^{20} \quad (7)$$

計算結果から、水面形の急変部は流体セルのボリュームを一定に保つため計算点の密度が自然と高くなっており、計算精度が良い。また、計算点は流体粒子と同じ速度で移流するため流体粒子の追跡能力があることも確認できる。

3. Lagrange 的方法と Euler 的方法の比較

Lagrange 的方法と Euler 的方法は計算点の座標が異なるため、両手法によって得られる流体粒子の軌跡の比較や固定座標上での流体の状態量の比較ができない。本研究では両者の視点の違いを比較するために、方法①：Euler 的方法で求めた格子点上の解から流体粒子の軌跡を補間したものと Lagrange 的方法の解との比較と、方法②：Lagrange 的方法で求めた計算点上の解から格子点上の状態量を補間したものと Euler 的方法の解との比較、双方のアプローチから比較を行った。尚、Euler 的方法は、時間的には陽解法、空間的には風上差分法や Lax-Friedrichs 法は人工粘性による拡散効果が大きいため、中心差分法を用いた。

比較項目として $\Delta t \cdot \Delta x$ 、河床勾配、粗度係数を様々に変えて計算し、上記 2 つのアプローチで水深と流速の波形の見方による違いを比較し、どのパラメータが両離散化手法にどのような影響を与えているのかを調べた。図-3 は、方法①と方法②によって得られた Lagrange 的方法と Euler 的方法の比較図である。縦軸は流速、横軸は距離を示している。Lagrange 的に求めた解は拡散していることが分かる。図-4 は方法①において Euler 法の $\Delta x=5\text{km}$ で計算したものと $\Delta x=7\text{km}$ で計算したものと流速の比較図である。Euler 法の陽解法では Δx を大きくすると解の振動が激しくなるため、陰解法で解いた。連立方程式の計算には Bi-CGSTAB 法を用いた。計算結果より、Euler 的方法においても解が拡散することが分かった。また、数値実験によって Δt を大きくとっても解は拡散することが分かった。

また、河床勾配を 1/2000 から 1/10000 まで段階的に変えて解を比較した。しかし、河床勾配は流速の波形の拡散に

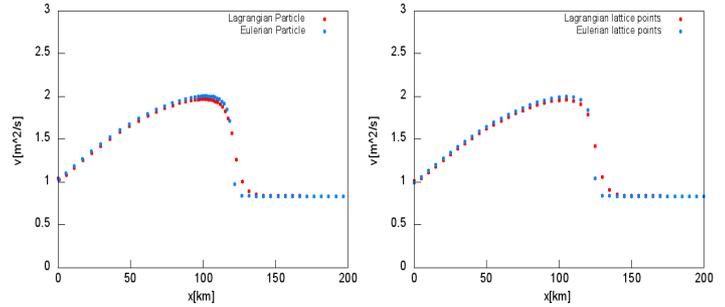


図-3 方法①(左)と方法②(右)の比較(Lagrange 法: $\Delta t=72\text{s}$, 初期 $\Delta x=5\text{km}$, Euler 法: $\Delta t=72\text{s}$, $\Delta x=1\text{km}$)

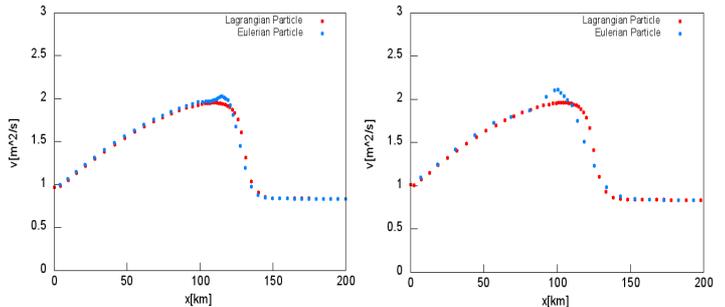


図-4 Euler 法の Δx の比較(Lagrange 法: $\Delta t=72\text{s}$, 初期 $\Delta x=5\text{km}$, Euler 法: $\Delta t=72\text{s}$, $\Delta x=5\text{km}$ (左) 10km (右))

影響しておらず、粗度係数も拡散に寄与しないことが分かった。従って、拡散に寄与するパラメータは $\Delta t \cdot \Delta x$ である。

波形の拡散の原因は $\Delta t \cdot \Delta x$ による可能性が高い。また、視点の違いよりも、基礎式の移流項と圧力項の離散化手法に起因する効果のほうが大きいことも分かった。Lagrange 的方法は Δx が急変部の前後で伸縮しているため、一様な Δx で計算する Euler 的方法と比べて解が拡散しているのだと思われる。

4. まとめ

本研究で得られた知見を以下に示す。

- 1) 本研究で示した離散化手法の物理的解釈に基づいて流入境界のある問題の新たな計算手法を提案した。
- 2) Lagrange 的に求めた数値解は、Euler 的に求めた数値解と比べて波形の急変部の前後で流速の違いによって Δx が伸縮しているため、波形が拡散している。
- 3) Lagrange 的・Euler 的方法による解の波形の違いは $\Delta t \cdot \Delta x$ が影響しているが、これらは離散化手法の違いによらずいつでも波形の拡散に影響を及ぼしている。

謝辞

本研究は科研費基礎研究(A)「可能最大洪水に対応できる数理科学的な河川計画手法の確立」(代表者、山田正)の支援を受けて、行われたものである。記して謝意を表す。

参考文献

- 1) Andrew Bennett: 『Lagrangian Fluid Dynamics』, Cambridge University Press
- 2) 日野幹雄: 『流体力学』, 朝倉書店
- 3) 『水理公式集例題プログラム集』, 土木学会