

# 浅水流方程式の解の不安定条件と転波列性サージ波速に関する検討

名城大学理工学部 正会員 新井宗之  
 京都大学防災研究所 フェロー 中川 一  
 名城大学大学院 学生会員 森川智仁

## 1. はじめに

山地流域において豪雨等により多数の間欠的な土砂流サージの流下現象がある。このような間欠的な多数のサージ流下は流れの不安定性によるもので一種の転波列の現象であると考えられる。転波列の生成条件は Dressler<sup>1)</sup> により支配断面の水面形方程式の解の不安定条件として示され、著者らもその基本的な考えに基づいて土石流の代表的な流動モデルに適用し転波列の生成条件を示し実験的にも対応することを明らかにした<sup>2)</sup>。開水路流れでの転波列の生成条件はおもにフルード数と抵抗則に関わる運動量補正係数との関係で示される<sup>2)</sup>。本研究は、平均流速、平均水深の変動成分による線形近似の基礎方程式を用いて流れの不安定条件(転波列生成条件)をフルード数と運動量補正係数およびサージ波速との関係で明らかにしたものである。

## 2. 不安定条件・波速

水深に比して幅の広い矩形断面水路での急激な水面変動を伴う連続式、運動方程式は次式のようなものである。

$$\frac{\partial \hat{h}}{\partial t} + \frac{\partial(\hat{h}\hat{u})}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \beta \hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} - (\beta - 1) \frac{\hat{u}}{\hat{h}} \frac{\partial \hat{h}}{\partial t} = g \sin \theta - g \cos \theta \frac{\partial \hat{h}}{\partial x} - \frac{f'}{2} \frac{\hat{u}^2}{\hat{h}} \quad (2)$$

ここに、 $t$ : 時間,  $x$ : 流下方向の座標,  $\hat{h}$ : 水深,  $\hat{u}$ : 流速,  $g$ : 重力加速度,  $\theta$ : 水路勾配,  $f'$ : 摩擦損失係数,  $\beta$ : 運動量補正係数。

ここで、基礎方程式を平均値からの変動成分で表した線形近似の基礎方程式で解の安定性を検討する。 $\hat{h}$  の時間平均を  $h_0 = (1/T) \int_0^T \hat{h} dt$ ,  $\hat{u}$  の時間平均を  $u_0 = (1/T) \int_0^T \hat{u} dt$  とし、その変動成分を  $\eta(x, t)$ ,  $u(x, t)$  とすと

$$\hat{u} = u_0 + u(x, t), \quad \hat{h} = h_0 + h(x, t) \quad (3)$$

である。ただし、変動成分  $\eta$ ,  $u$  は平均値に対して微小であるとする。式(3)を式(1), (2)に代入し、その2乗の項を無視すると、連続式、運動方程式は次式となる。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + h_0 \frac{\partial u}{\partial x} + u_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \beta u_0 \frac{\partial u}{\partial x} - (\beta - 1) \frac{u_0}{h_0} \frac{\partial \eta}{\partial t} + g \cos \theta \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ + \frac{f'}{2} \frac{u_0^2}{h_0} \left( 1 + 2 \frac{u}{u_0} - \frac{\eta}{h_0} \right) - g \sin \theta = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

無次元量にプライムを付し、 $x' = x/h_0$ ,  $t' = tu_0/h_0$ ,  $u' = u/u_0$ ,  $\eta' = \eta/h_0$  と定義する。これらを式(4), (5)に適用すると無次元連続式、運動方程式は次式のようなものである。

$$\frac{\partial \eta'}{\partial t'} + \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial \eta'}{\partial x'} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} + \beta \frac{\partial u'}{\partial x'} - (\beta - 1) \frac{\partial \eta'}{\partial t'} + \frac{1}{F_r^2} \frac{\partial \eta'}{\partial x'} + \frac{f'}{2} (1 + 2u' - \eta') - \frac{1}{\varphi^2} = 0 \quad (7)$$

ここに、

$$F_r = \frac{u_0}{\sqrt{gh_0 \cos \theta}}, \quad \varphi = \frac{u_0}{u_*}, \quad u_* = \sqrt{gh_0 \sin \theta} \quad (8)$$

である。さらに、式(7)の導関数を取り式(6)を適用すると  $\eta'$  に関する次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \eta'}{\partial t'^2} + 2\beta \frac{\partial^2 \eta'}{\partial t' \partial x'} + \left( \beta - \frac{1}{F_r^2} \right) \frac{\partial^2 \eta'}{\partial x'^2} \\ + \frac{f'}{2} \left( 2 \frac{\partial \eta'}{\partial t'} + 3 \frac{\partial \eta'}{\partial x'} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial f'}{\partial \eta'} \frac{\partial \eta'}{\partial x'} = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

ここで、無次元波数を  $k$ , 無次元角周波数を  $\omega$  とし、 $\eta'$  が  $\exp(i(kx' - \omega t'))$  に比例するとすると、 $A$  を定数として

$$\eta' = A \exp(i(kx' - \omega t')) \quad (10)$$

とするものとする。式(10)を式(9)に代入し  $A \exp(i(kx' - \omega t'))$  で除すと

$$(\omega - \beta k)^2 - \left( \beta^2 - \beta + \frac{1}{F_r^2} \right) k^2 + f' \left\{ \omega - \frac{1}{2} \left( 3 - \frac{1}{f'} \frac{\partial f'}{\partial \eta'} \right) \right\} i = 0 \quad (11)$$

である。解の不安定条件は実数部が正であるから

$$(\omega - \beta k)^2 - \left( \beta^2 - \beta + \frac{1}{F_r^2} \right) k^2 > 0 \quad (12)$$

である。分散関係で表せば

$$\pm(\omega - \beta k) > \sqrt{\beta^2 - \beta + \frac{1}{F_r^2}} k$$

である。これより位相速度  $v_p$  は  $v_p = \omega/k$  であり、波速  $c$  は  $c = v_p$  であるから、波速  $c = v_p$  の領域は

$$c = v_p > \beta + \sqrt{\beta^2 - \beta + \frac{1}{F_r^2}} \quad (13)$$

または

$$c = v_p < \beta - \sqrt{\beta^2 - \beta + \frac{1}{F_r^2}} \quad (14)$$

Keyword: 波速, 転波列, 浅水流運動方程式, 線形安定解析

〒468-8502 愛知県名古屋市中白区塩釜口 1-501 Tel: 052-838-2364

3. 実験条件実験結果

実験に使用した水路は、京都大学防災研究所宇治川オープンラボラトリーに設置の図1に示すような長さ56m、幅10cm、深さ15cm、硬質透明アクリル製直線水路である。また、下流側貯水槽内に設置したボルテックス型のポンプにより粒子と水を水路上流端に送水する循環式水路である。ポンプは5mm程度の個体粒子を混入させて送水することができる。流量はインバータによるポンプの回転数の制御により決めている。実験条件、実験結果を表1に示す。水路勾配θは3.0degである。流量は $Q = 503.7 \sim 1927.0 \text{ cm}^3/\text{s}$ で、計量槽による水路下流端での採水方法による測定値である。平均水深 $h_0$ は水路下流端から3m上流位置における水深変動の約120秒間の単純平均である。水深は水路側面より1/120秒で約120秒間記録した画像から時系列の水深変動を求めて解析に供している。平均流速 $u_0$ は測定流量 $Q$ より平均水深、水路幅による断面平均流速である。表中の波速 $c_e(\text{m/s})$ は、水路下流端より上流3.8m位置から3.0mの位置を約120秒間に通過するサージ頂部の平均流下速度である。実験に使用した粒子は、No.9~15がポリプロピレン粒子で、No.16~20が石炭粉粒子である。ポリプロピレン粒子は円柱状の形状で名目直径が $d = 2.97\text{mm}$ 、密度が $\rho_s = 1.02\text{g/cm}^3$ 、石炭粉粒子は $d_{50} = 0.61\text{mm}$ 、密度が $\rho_s = 1.41\text{g/cm}^3$ である。容積濃度 $C$ は水路下流端での流量測定における粒子含有量を測定した結果である。容積濃度は $C = 0.09 \sim 0.12$ である。No.1~8は清水の実験で粒子は含まれていない。

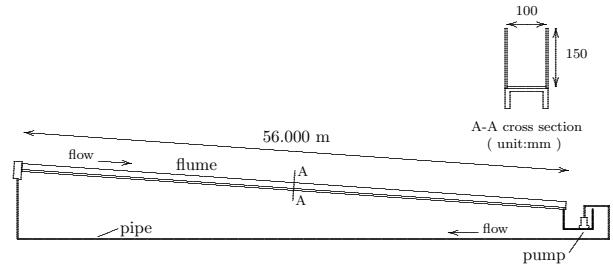


図1 実験水路概念図

表1 実験条件・結果

No.	$Q$ (cm <sup>3</sup> /s)	$h_0$ (cm)	$u_0$ (m/s)	$c_e$ (m/s)	$C$	rem
1	503.7	0.83	0.609	1.25	0.00	●
2	704.8	0.73	0.971	1.33	0.00	●
3	883.4	1.06	0.832	1.80	0.00	●
4	1089.5	1.07	1.016	1.65	0.00	●
5	1453.8	1.15	1.266	1.83	0.00	●
6	1475.4	1.13	1.308	1.59	0.00	●
7	1634.7	1.11	1.466	1.87	0.00	●
8	1884.4	1.45	1.303	1.47	0.00	●
9	969.3	1.18	0.821	1.67	0.12	△
10	1014.2	0.99	1.025	1.25	0.12	△
11	1283.8	1.33	0.97	2.21	0.11	△
12	1374.9	1.23	1.117	1.73	0.13	△
13	1428.5	1.22	1.169	1.74	0.11	△
14	1439.6	1.21	1.189	1.83	0.11	△
15	1688.2	1.45	1.164	1.82	0.09	△
16	1082.5	1.25	0.863	1.79	0.10	◇
17	1122.3	1.64	0.685	1.79	0.11	◇
18	1211.4	1.73	0.700	2.02	0.12	◇
19	1724.8	1.46	1.183	1.81	0.10	◇
20	1927.0	1.52	1.270	2.01	0.11	◇

4. 考察

流れの不安定条件における波速、式(13)、(14)と実験結果との関係を図2に示す。図中に式(13)、(14)の限界値として

$$c = \beta + \sqrt{\beta^2 - \beta + 1/F_r^2}, \quad c = \beta - \sqrt{\beta^2 - \beta + 1/F_r^2} \quad (15)$$

を示している。それぞれの上側、下側の領域が式(13)、(14)の領域である。実験結果による波速 $c$ は、水路下流端3.8mから3.0mにおけるサージ頂部の流下速度 $c_e$ と平均流速 $u_0$ との差を長波の波速で除して次式のように無次元量としている。実験結果による水深波長比が長波に相当していることから無次元量に長波の波速を用いた。

$$c = (c_e - u_0) / \sqrt{gh_0 \cos \theta} \quad (16)$$

図中の実線は $\beta = 1$ 、破線は $\beta = 1.05$ の場合であり、実験結果は、清水が“●”，ポリプロピレン粒子の含有が“△”，石炭粉粒子が“◇”で示している。サージの波速の測定位置が水路下流端から3m余の位置で、水路上流端からは52.2mから53mの間の波速である。十分発達した波速と考えられるので領域の限界線上ではなくそれよりも大きな $c$ の値となっていると考えられる。また、波速 $c$ の生成領域が、その導出過程より式(13)、(14)のように2つの領域となるが、実験結果の数は少ないものの式(14)の領域も生じることが示されている。 $\beta = 1.05$ の場合、式(13)の $\beta = 1$ の場合より

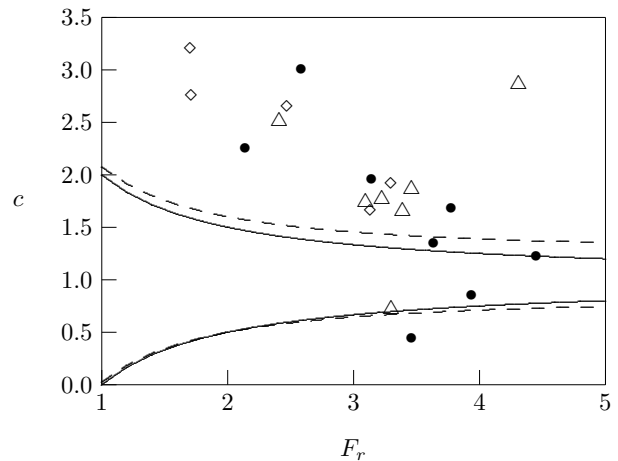


図2  $c - F_r$

大きな $c$ の値となり、実験結果からは $\beta = 1$ の場合の方が若干ではあるがよく対応している。

参考文献

1) Dressler, R.F.; *Communication on Pure and Applied Mathematics*, Vol.II, No.2/3, 1949.  
 2) 新井宗之, 水山高久: 高濃度泥流サージの生成機構と流動モデルに関する研究, 土木学会論文集 B1, Vol.67, No.3, pp.92-100, 2011.