

POD と DMD を用いた矩形断面前縁付近の流れに関する考察

京都大学大学院工学研究科 学生会員 ○塚前 伊久磨
 京都大学大学院工学研究科 学生会員 谷口 優佑

株式会社大林組 (当時京都大学院生) 河田 祐太郎
 京都大学大学院工学研究科 正 会 員 白土 博通

1. まえがき 乱流下において, bluff body の断面周りの span 方向の相関は, 接近流の span 方向の相関より高いことが知られている. これは従来, 接近流から剥離せん断層に移る過程で, 流れの二次元化が促進されていることや, 剥離バブルやカルマン渦^[1]が相関度の増加に寄与すると考えられている. 本研究では, 2次元矩形柱の前縁付近の剥離バブルを含む流れ場を対象に流速場のモード分解を試み, 流れの span 方向への広がり方について考察した.

2. 可視化実験概要 断面辺長比 $B/D=8.0$ の矩形断面モデルを対象に, 模型静止状態において, 格子乱流中で流れの可視化実験を行った. 撮影範囲は模型表面から $5.0[\text{mm}]$ の平面 (以下, XY 平面) とスパン中央断面 (以下, XZ 平面) の2種類の平面において, 模型表面近傍 (以下, in) と接近流 (以下, out) の2種類とした. (Fig.1 参照) 得られた流れ場に対して PIV 解析を施した. 連続する2時刻の画像間での局所的な濃度パターンの類似性を相互相関により求め, そのピーク位置から粒子移動距離を算出する画像相関法により, その移動距離から速度分布を測定した. 各平面での計測領域及び格子点数は, 格子幅が全て $1.5[\text{mm}]$ となるように設定した. これらの設定値を Table 1 に示す.

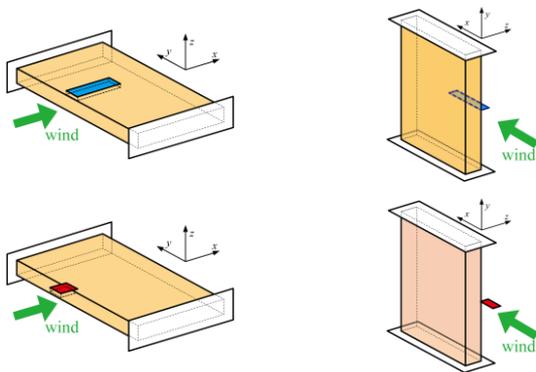


Fig.1 対応図(左: XY 平面, 右: XZ 平面, 上: in, 下: out)

Table 1 各平面での計測領域及び格子点数

| 撮影パターン | | 計測領域 | 格子点数 |
|--------|---------|----------------|--------|
| XY 平面 | in データ | 150×62.5 [mm] | 100×41 |
| | out データ | 62.5×62.5 [mm] | 41×41 |
| XZ 平面 | in データ | 150×10 [mm] | 100×6 |
| | out データ | 62.5×10 [mm] | 41×6 |

3. POD による流れ場の考察 POD(Proper Orthogonal Decomposition)では, データを最も効率良く展開するための最適な基底を探し求めることを目的としている. 以下では POD 基底の具体的な求め方を述べる^[2].

ある変動風速データ x'_i が与えられたとする. このデータに, 適した座標系又は基底を設定するため, x'_i を r 次元の基底で表し, 再度もとの n 次元空間に戻した際に残差が最小となるような基底を考える. これは共分散行列

$$R = \int_{\min}^{\max} x'_i x'_i{}^T dt \in R^{n \times n} \quad (3.1)$$

の固有ベクトル (ϕ_k) と固有値 (λ_k) を求めることで解ける. この固有値は各々の固有ベクトルの寄与の大きさを表す.

また, 低次元基底を構築するにあたり, モードをいくつ採ればよいかを決める際に, 一般的には,

$$C_n = \sum_{k=1}^r \lambda_k / \sum_{k=1}^n \lambda_k \approx 1 \quad (3.2)$$

となるように基底ベクトルの数 r を選ぶ. この C_n を累積寄与率という.

XY 平面の in の POD モードは span 方向に一樣なモード形状が 1 次モード等に卓越した. しかし, Fig.1 の u 成分の 6 次モードに着目すると, 尾根が斜めに形成されていることが観察される. これは, 主流方向の流体の運動量 (ρu) が v 成分 (span 方向成分) の影響で span 方向に流されながら輸送されていることを表していると考えられる. また, Fig.1 の v 成分の 2 次モードに着目すると, このモードでも 尾根が斜めに形成されており, span 方向の流体の運動量 (ρv) が u 成分の影響で主流方向に流されながら輸送されていることを表していると考えられる.

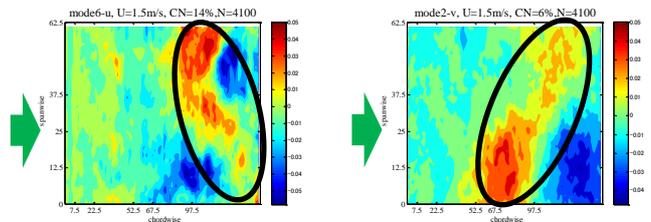


Fig.2 XY 平面での POD6, 2次モード(in データ, u, v 成分)

Fig.3 の u, w 成分の 2 次モードを組み合わせると, Leading Edge から主流方向へ $50 \sim 90[\text{mm}]$ 付近

キーワード 剥離バブル, 流れの二次元化, POD, DMD, 乱流

連絡先 〒615-8540 京都市西京区京都大学桂 Tel: 075-383-3170 Fax: 075-383-3168

で渦が生じているとみなすことができる。この渦は剥離バブルの下流側に存在する main vortex^[3]に相当するものと考えられる。従って、この渦の存在が span 方向の流れの二次元化の促進に寄与するものと判断される。

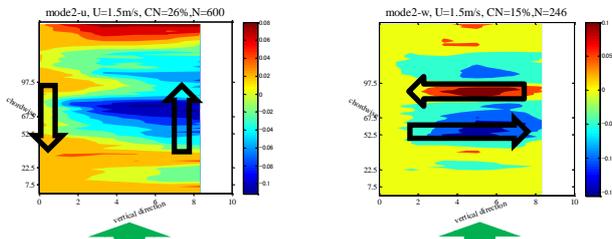


Fig.3 XZ 平面での POD2 次モード(in データ, u, w 成分, 平面図)

4. DMD による流れ場の考察 DMD(Dynamic Mode Decomposition)とは、瞬時場の前後の関係を扱うことで、動的な情報とそれに対応するモードの抽出を行う解析手法であり、連続する時系列データの関係性から特定の周波数での動的な情報とそれに対応するモードの抽出が可能であるといえる。以下では DMD の数理について簡単に述べる [4][5][6]

DMD では、まず、ある瞬間の流れ場 x_t に対して線形写像 A を作用させることで次の瞬間の流れ場 x_{t+1} が得られると仮定する。つまり、

$$Ax_t = x_{t+1} \quad (t=1,2,3,\dots,m) \quad (4.1)$$

が成立する。ここで、 $X_t^m = [x_1^t \ x_2^t \ \dots \ x_m^t]$ と定義すると、(4.1)式は次のように書くことができる。

$$AX_t^m = A[x_1^t \ x_2^t \ \dots \ x_m^t] \approx X_{t+1}^{m+1} \in R^{n \times m} \quad (4.2)$$

この行列 A の固有ベクトル $\{\xi_i\}_{i=1}^m$ が求めたい動的モードである。しかしながら、行列 A の固有値計算はしばしば収束せず 2 次モード程度の抽出しか行われないことも多い。また、行列反転の計算精度があまり良くないことが指摘されている。

そこで特異値分解($X_t^m = U\Sigma V^*$)と呼ばれる数学的手法を用いることにより、行列 A の固有値 κ_i と固有ベクトル ξ_i を近似的に求める。これにより、流れ場 $\{x_t\}_{t=1}^m$ は以下のように表される。

$$x_t' = A^{t-1}x_1' = \sum_{i=1}^r c_i \kappa_i^{t-1} \xi_i \quad (4.3)$$

(4.3)式を見ると、時間変化に関する情報は κ_i^{t-1} の項のみであるため、 $|\kappa_i| < 1$ 、 $|\kappa_i| > 1$ のときには ξ_i が表す流れは減衰、増幅することを意味している。増幅減衰のない周期的な流れでは固有値の絶対値は $|\kappa_i| \approx 1$ となる。

Fig.4 は XY 平面における DMD モードの固有振動数が低いものを 2 つ選び、それぞれのモードについて基準点(赤丸)に対する各点の位相遅れをコンター図で表している。これらのモードは $|\kappa_i| \approx 1$ であるので、より持続性のあるモードである。Fig.4 の左図を見る

と、流れの再付着点近傍で span 方向に同様の位相遅れを示す領域が広がっている様子が確認できる。Fig.4 の右図では span 方向に平行ではなくやや傾いた分布を示すモードも得られた。これは流れが span 方向に同相に変化しているのではなく、ある位相のずれをもって変化しているものと思われる。

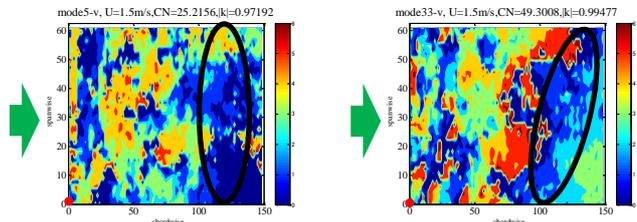


Fig.4 XY 平面における DMD モードの基準点に対する各点の位相遅れ(in データ, v 成分)

Fig.5 の DMD の 6 次モードを見ると POD の 1 次モードとよく似た形状をしていることが分かる。これは POD 解析では一番寄与率の高いモードを示しており、DMD 解析では固有値の絶対値が 1 に近く寄与率の高いモードで周期性のある流れを表現できたと考えられる。

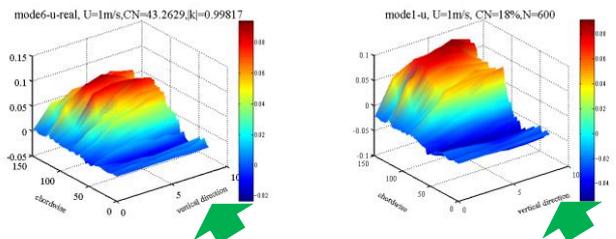


Fig.5 XZ 平面での DMD(左), POD(右)モード(in データ, u 成分)

5. まとめ POD 解析では、主流方向の流体の運動量が span 方向に、span 方向の流体の運動量が主流方向に流されながら輸送されるような、剥離バブル内の二次元化の様子が観察された。DMD 解析では、流れの再付着点近傍で span 方向に相関を持つ様子が確認できた。しかし、一部のモードでしか確認できなかったため、今後より検討していく必要がある。また、POD 解析と DMD 解析で同じようなモード形状を持ったものが得られたことから、最適な線形写像が決定できれば、動的情報を含んだ剥離バブル内の二次元化の議論が可能といえる。

参考文献

[1] 伊藤ら：構造工学論文集, Vol.60A, 418-427, 2014
 [2] 平：1. 基礎, ながれ, 30, 115-123., 2011
 [3] Bruno et al.: J.Wind Eng. Ind. Aerodyn., 104-106, 203-215., 2012
 [4] 平：2. 応用, ながれ, 30, 263-271., 2011
 [5] Schmid：J. Fluid Mech., 656, 5-28., 2010
 [6] 左海ら：日本航空宇宙学会論文集, Vol.62, No.2, 47-54, 2014