

軸対称円柱の弾性解析における力学的境界条件の影響

足利工業大学	正会員	末武 義崇
足利工業大学	正会員	松村 仁夫
足利工業大学	正会員	黒井登起雄

1. まえがき

コンクリート円柱供試体の弾性解析については、軸対称問題として取り扱われた研究報告^{1),2)}が多くなされている。しかしながら、供試体の圧縮試験の場合、圧縮力が載荷盤を介して供試体に伝達されるため、供試体端面の応力状態は必ずしも明確ではなく、端面における力学的境界条件の現実的な設定は容易ではない。一方、コンクリートの圧縮試験に関しては、圧力測定フィルムを用いた端面の圧力分布測定³⁾が注目されている。円柱供試体の弾性解析においても、こうした測定結果を境界条件の設定に活用することが期待できる。

本研究は、一軸圧縮を受ける軸対称円柱の弾性解析を行ったものである。その際、端面における力学的境界条件が解析結果に及ぼす影響について定量的な検討を行った。また、実験結果との比較も実施した。

2. 軸対称円柱の弾性解析

解析対象とする円柱供試体の側面図および座標系を図1に示す。本研究では、円柱供試体の変形が z 軸に関して対称であると共に、中央面 $z=0$ に関し上下にも対称であると仮定する。この場合、半径方向変位 u_r 、軸方向変位 u_z およびせん断ひずみ γ_{rz} に関し、次の幾何学的境界条件が成立する。

$$u_r(0, z) = u_z(r, 0) = 0 \quad , \quad \gamma_{rz}(0, z) = \gamma_{rz}(r, 0) = 0 \quad (1)$$

この幾何学的境界条件を考慮し、 z 方向に三角関数、 r 方向にBessel関数を用いた変位関数の級数表示を仮定して、等方弾性体の基礎方程式を満たす解析解を誘導した。誘導過程で生ずる任意定数については、供試体の側面および端面における力学的境界条件を適用して決定することができる。

3. 力学的境界条件

供試体の載荷状態として一軸圧縮を想定しているから、側面($r=R$)においては垂直応力 σ_r およびせん断応力 τ_{rz} が共にゼロとなる。一方、端面($z=\pm h$)においては、載荷盤を介して試験機の圧縮力が作用することになるため、実際にどのような分布の垂直応力が作用しているのかは不明である。本研究では、圧力測定フィルムを用いた端面の圧力分布測定結果を参考にし、端面における垂直応力分布を仮定した。

図2に、普通強度コンクリートの圧縮破壊時における垂直圧力分布の一例を示す。図から明らかなように、端面における垂直応力は、周辺部で大きく中央部でほぼゼロになるような分布を示している。逆に、中央部で大きく、周辺部でゼロに近い分布が計測される場合もある。そこで本研究では、端面の垂直応力分布として、図1に示したように中央部でゼロとなる放物線状の分布と、周辺部でゼロとなる分布の2通りの分布を仮定した。分布の大きさについては、分布の総量が試験機の載荷荷重 P に一致するように調節した。

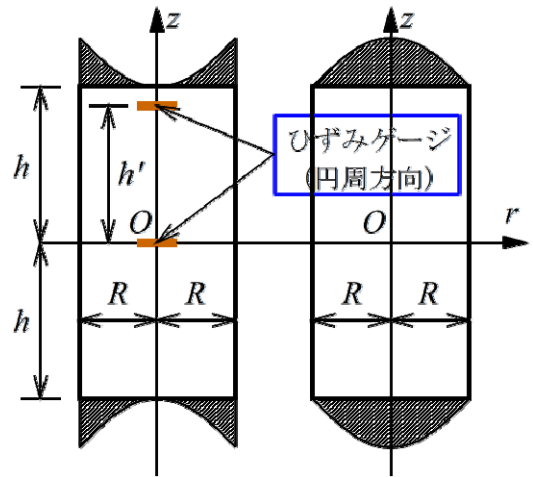


図1. 供試体の側面図および座標系

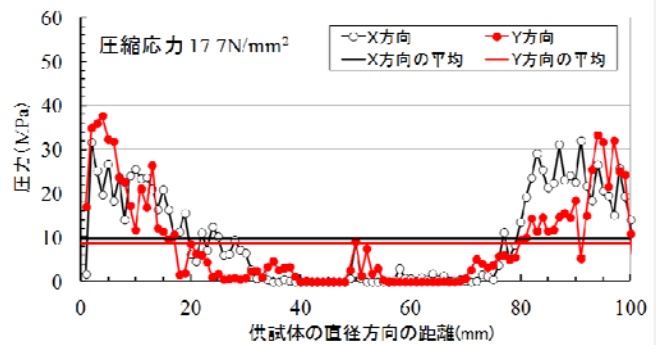


図2. 圧縮破壊時における圧力分布の一例

キーワード：円柱，軸対称問題，二次元弾性解析，力学的境界条件，Fourier-Bessel展開，圧力測定フィルム
〒326-8558 足利市大前町 268-1 足利工業大学 建築・社会基盤学系 TEL: 0284-22-5681 FAX: 0284-64-1061

垂直応力の適用に当たっては、仮定した分布を Fourier-Bessel 展開して適用し、任意定数を決定した。

端面上のせん断応力については実験データが無く、境界条件の設定が難しい。本研究では、せん断応力 τ_{zr} を単純にゼロとした場合(「せん断ゼロ」と)と、端面の軸方向変位が一定であるとする事で、せん断応力 τ_{zr} をゼロとしない場合(「定変位」)の2通りを想定した。

4. 数値計算結果

本研究では、実験で使用したコンクリート供試体の寸法・材料定数を用いて数値計算を実施した。供試体高さは $2h = 200.45[mm]$ 、直径は $2R = 99.75[mm]$ 、Young 率は $E = 2.30 \times 10^4 [MPa]$ 、Poisson 比は $\nu = 0.2$ 、載荷荷重レベルは $P = 140[kN]$ である。供試体の使用セメントは普通ポルトランドセメントであり、水セメント比は 60% である。また、供試体にはキャッピングが施され、載荷面の平滑性が確保されている。さらに、載荷盤と供試体の間にテフロンシートを挿入することで、端面における摩擦を極力低減するように配慮している。

計算結果と実験結果の比較を図3および図4に示す。両図共に、半径方向変位の供試体高さ方向の分布を示したものであり、横軸に無次元化変位 $\hat{u}_r \equiv u_r/R$ を、縦軸に供試体軸方向の無次元化座標 $\hat{z} \equiv z/h$ をそれぞれとって示した。図3が、端面において中央部でゼロとなる放物線状の垂直応力分布を仮定した場合の結果であり、図4が周辺部でゼロとなる分布を仮定した場合の結果を示している。数値計算に当たっては、結果のグラフが収束する程度以上の項数を取って級数の計算を行った。

2つの図に示した結果から明らかなように、供試体高さ方向の中央部付近においては、端面の境界条件に依らず、ほぼ同様の半径方向変位分布が得られている。一方、端面近傍においては、境界条件の違いによって、全く異なる変形挙動が得られていることも分かる。また、実験値と比較すると、「せん断ゼロ」の解析結果が比較的近い数値を与えていることが分かる。

5. まとめ

本研究では、一軸圧縮を受ける軸対称円柱の弾性解析を行い、端面における力学的境界条件の設定が、円柱の変形にどのような影響を及ぼすか、定量的な検討を行った。併せて、コンクリート供試体の圧縮試験結果との比較も試みた。解析結果から、端面における境界条件の相違は、端面近傍の変形挙動に大きな影響を及ぼすことが明らかになった。また、実験結果との比較を通じ、端面上の摩擦をゼロと仮定して解析することで、実験結果を比較的良好に評価し得ることも明らかになった。今後は、実験結果との比較例を蓄積し、弾性解析における境界条件の設定について、さらなる検討を行っていく予定である。

参考文献：1) 斎藤秀雄：短円柱および円盤の軸対称変形，機械学会論文集，Vol.18, No.68, pp.21-28, 1952. 2) 渡辺：載荷端面での半径方向変位を拘束された軸対象有限円柱の弾性解析，土木学会論文集，No.450/I-20, pp.85-94, 1992. 3) 松村・黒井：コンクリートの圧力解析における圧力測定フィルムの画像処理方法，コンクリート工学年次論文集，Vol.35, pp.397-402, 2013.

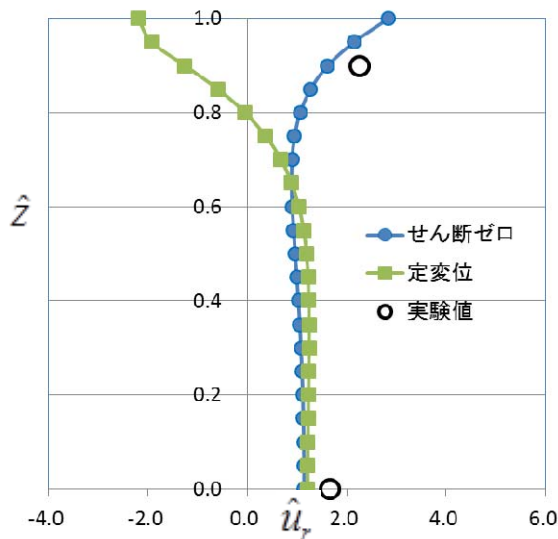


図3. 供試体高さ方向の半径方向変位分布 (中央部でゼロとなる放物線分布)

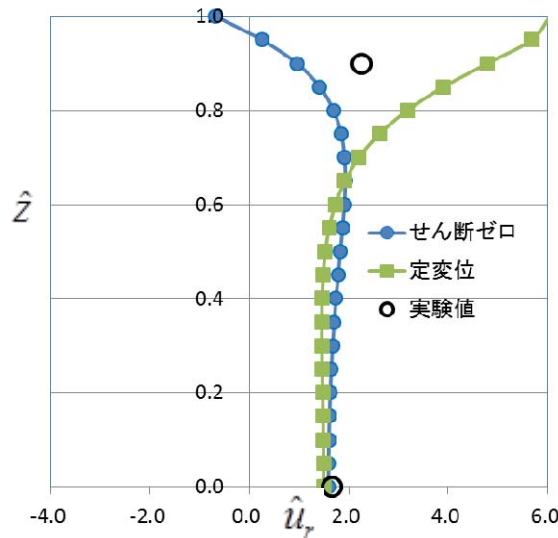


図4. 供試体高さ方向の半径方向変位分布 (周辺部でゼロとなる放物線分布)