subset 法を用いた損傷確率評価の精度および効率に関する分析

大成建設株式会社　正会員　○坂下　克之　正会員　畑　明仁
株式会社篠塚研究所　フェロー会員　志波　由紀夫

１．はじめに

subset 法[1)]は，損傷確率が小さい場合に，標本発生領域を破壊側に徐々に狭めながらモンテカルロシミュレーションを繰り返して効率よく損傷確率を評価する手法であり，筆者らはこれまで地中構造物の地震時損傷確率評価に適用している[2)]．本論文では，その標本発生過程において理想的な独立乱数による標本が発生できているという前提のもとで，有限個の標本から評価することによる誤差，すなわち標本数に応じた subset 法の精度を理論的に評価し，subset 法による評価を効率的に行うための標本数に関する条件を検討した．

２．subset 法の精度評価式

各ステップで領域内にn個の標本を発生させ，危険側からm番目とm+1 番目の評価指標（照査値）の平均値を境界値として領域をm/nずつ狭めていき，最終ステップ（評価指標の境界値が破壊と判定されたステップ）kで破壊標本がj個（$m \le j \le n$）とカウントされた場合，損傷確率Pは次式で計算される．

$$P(k,j,m,n) = \left(\frac{m}{n}\right)^{k-1}\frac{j}{n} \tag{1}$$

パラメータ間の変動を独立とすると，この精度については，パラメータの数やその確率分布等によらず，１次元区間 0～1 における一様乱数の発生問題に帰着できる[2)]. 0～1 の範囲にn個の独立な一様乱数を発生させたときの小さい方からm番目の値xの確率密度関数$A(x,m,n)$は，順序統計量の確率密度関数として次式のようになる．

$$A(x,m,n) = \binom{n}{m} m x^{m-1}(1-x)^{n-m} \tag{2}$$

ここに$\binom{n}{m}$：n個からm個を選ぶ組み合わせの個数

これより 1 ステップ目における領域の縮小率m/nの確率密度関数は近似的に次式となる．

$$B_1(x,m,n) = \frac{1}{2}\big(A(x,m,n) + A(x,m+1,n)\big) \tag{3}$$

iステップ目における領域の縮小率$(m/n)^i$の確率密度関数$B_i(x,m,n)$は，確率密度関数が$B_1(x,m,n)$と$B_{i-1}(x,m,n)$に従う２つの変数の積の確率密度関数になるから，次式のようになる．

$$B_i(x,m,n) = \int_x^1 \frac{1}{y} B_1\left(\frac{x}{y},m,n\right) B_{i-1}(y,m,n)\,dy \tag{4}$$

損傷確率正解値がP_tのとき，最終ステップで算定される損傷確率予測値のばらつき，すなわち「$k-1$ステップ目までは評価指標の境界値が破壊とならず，kステップ目で評価指標の境界値が破壊となり，そのときの破壊標本数がj個（$m+1 \le j \le n$）である確率」$p(k,j,P_t,m,n)$は次式で計算される．

$$p(k,j,P_t,m,n) = \int_{P_t}^1 B_{k-1}(x,m,n)\,C\left(\frac{P_t}{x},j,n\right)dx \tag{5}$$

ここに$C(\alpha,j,n)$は，「0～1 の範囲にn個の独立な一様乱数を発生させたとき，0～α（$0<\alpha<1$）の範囲にj個含まれる確率」で次式により算定される．

$$C(\alpha,j,n) = \binom{n}{j}\alpha^j(1-\alpha)^{n-j} \tag{6}$$

ただし式(5)のjの適用範囲は$m+1 \le j \le n$であり，$j=m$に対しては次式となる．

$$p(k,m,P_t,m,n) = \int_0^{P_t} B_k(x,m,n)\,dx - \int_0^{P_t} B_{k-1}(x,m,n)\,dx - \sum_{j=m+1}^{n} p(k,j,P_t,m,n) \tag{7}$$

３．subset 法の効率の分析

前節の精度評価式をもとに，m/nを変化させた場合，同等の精度を得るのに必要な解析数を比較して「領域を何分の１ずつ狭めていくのが効率的か」を検討した．ここに「解析」とは１つの標本に対する構造解析や部材照査等の一連の作業を指す．subset

キーワード　モンテカルロシミュレーション，subset法，損傷確率，精度
連絡先　〒245-0051　横浜市戸塚区名瀬町344-1　大成建設株式会社　技術センター　ＴＥＬ045-814-7230

法の標本発生過程において目標領域から外れた場合の不採用解析数を除く最低解析数は次式となる．

$$N = n + (k-1)(n-m) \qquad (8)$$

ここに　k：損傷確率が求まるまでのステップ数

損傷確率正解値P_t＝5.0×10^{-4} を想定し，m/n＝1/10，n＝500，m＝50 を基準ケースとしてまず損傷確率予測値の確率密度分布を求める．続いて，いくつかのm/nに対して，図-1 の例のように損傷確率予測値の確率密度分布ができるだけ重なるように（精度が同程度となるように）n，mを同定して式(8)により最低解析数を算出して比較した．また通常のモンテカルロシミュレーションに対しても同様に解析数を同定して比較した．通常のモンテカルロシミュレーションによる損傷確率予測値の確率密度分布は，式(6)において，αを損傷確率正解値，nを解析数とすることにより算出できる．

比較結果を表-1 に示す．また横軸にm/nを，縦軸に解析数を表示したものを図-2 に示す．$m/n \geq$1/20（0.05）では解析数は，m/nが小さくなると漸増するがオーダー的にそれほど顕著な変化ではない．通常のモンテカルロシミュレーションの解析数はこれらの約 20 倍であり，subset 法の効率性が顕著である．$m/n \leq$1/50（0.02）になると解析数が急激に増加するようになる．解析数だけで見るとm/nが大きいほど効率的ということになるが，表-1 よりm/n＝1/2 のときには，損傷確率が求まるまでのステップ数が 10～11 と非常に多くなり，ステップ数増加に伴う付加的な手間を考えたときには効率的とは言えない．一般的にはm/n＝1/10 程度とする事例が多いが，本検討からも 1/20≤ m/n ≤1/5 程度が妥当であるといえる．

損傷確率正解値P_t＝5.0×10^{-3} の場合の結果を図-3 に示す．傾向は上記と同様であるが，P_tが大きくなると，通常のモンテカルロシミュレーションの解析数が減ってくるので，不採用解析数も考慮すると subset 法そのものの効率性が顕著でなくなる．

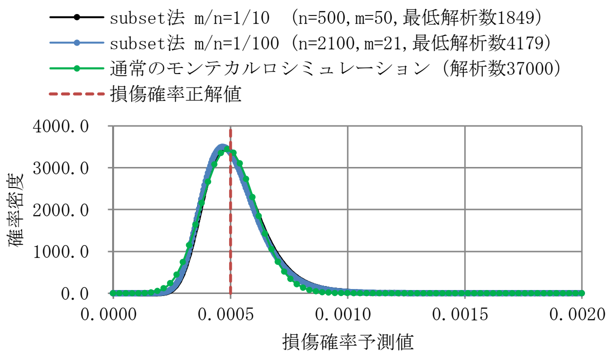

図-1　解析数等の同定の例（P_t＝5.0×10^{-4}）

表-1　解析数等の同定結果（P_t＝5.0×10^{-4}）

m/n	n	m	解析数	ｽﾃｯﾌﾟ数 k
通常MCS	―	―	37000	―
1/500	8500	17	16983	2
1/200	3600	18	7182	2
1/100	2100	21	4179	2
1/50	1600	32	3457	2～3
1/20	740	37	2146	3
1/10	500	50	1849	4
1/5	330	66	1394	5～6
1/2	210	105	1303	10～11

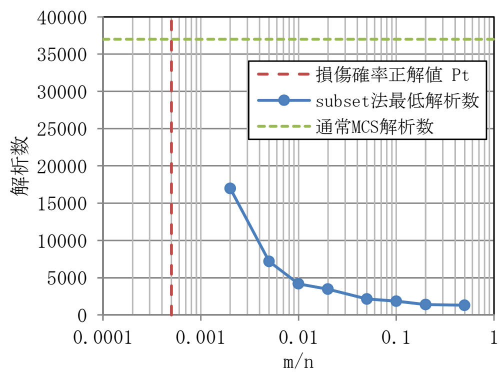

図-2　互いに精度が同程度となる解析数（P_t＝5.0×10^{-4}）

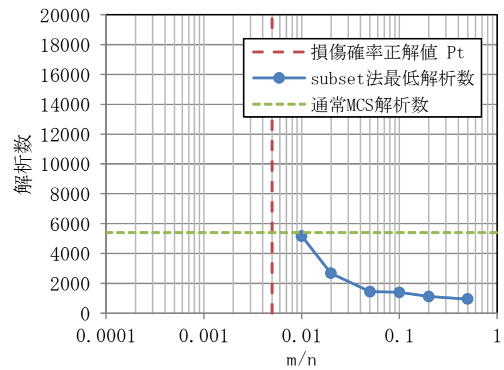

図-3　互いに精度が同程度となる解析数（P_t＝5.0×10^{-3}）

参考文献

1) Au, S. K.. and Beck, J. L. : Subset Simulation and its Application to Seismic Risk Based on Dynamic Analysis, Journal of Engineering Mechanics, Vol.129, No.8, pp.901-917, 2003.

2) 坂下，畑，志波：subset 法を用いた地中構造物の地震時損傷確率評価，第 34 回地震工学研究発表会，B12-603，2014.