

反射・透過係数法を用いた境界要素法による積層構造の弾性波動解析

○東京工業大学大学院 学生会員 月岡桂吾
 東京工業大学大学院 正会員 古川 陽
 東京工業大学大学院 正会員 廣瀬壮一

1. はじめに

免震ゴムや繊維強化プラスチックに代表される積層構造は、単一の材料では発揮できない性能を発揮することから、様々な構造物に用いられている。近年、土木構造物の老朽化が問題視され、積層構造に対する超音波非破壊検査もまた注目を集めている。それに伴い、積層構造を対象とした弾性波動解析の重要性も高まっている。

弾性波動解析の代表的な手法として有限要素法が挙げられる。有限要素法はその汎用性の高さから、様々な問題に対して用いられてきた。しかし、高周波数の解析では、扱う波動の波長が短くなり、それに対応させるために要素の大きさも小さくなるため、結果的に要素数が膨大となる。

これに対して、境界要素法は対象とする領域の境界のみを離散化するため、有限要素法に比べて要素数を減らすことができる。積層構造を対象とする境界要素解析では、無限領域における Green 関数を用いた場合、各層の界面や材料内部の欠落および不整部分を離散化する必要がある。これに対して、積層構造における Green 関数を用いた場合、材料内部の欠落および不整部分の離散化のみが必要となる。

以上を踏まえ、本研究では反射・透過係数法に基づく積層構造の Green 関数を用いた境界要素法の開発を行う。本手法は、従来の境界要素法と比較して、要素数を減らすことができるため、使用メモリの削減が期待できる。以下では、まず、境界要素法の定式化および離散化について説明する。次に、積層構造における Green 関数の計算方法について言及し、最後にまとめと今後の予定を示す。

2. 波動散乱問題に対する周波数領域境界要素法

本稿では、3次元の積層構造弾性体を対象とした、散乱体による入射波の散乱問題を取り扱う。以下では、原則として下付き添字は1, 2, 3を表し、1つの項の中で繰り返し使われる添字は総和規約に従うものとする。

積層構造における散乱体の概略を図1に示す。Vは線形弾性体によって構成される積層構造の領域、Sは散乱体の境界、nは境界S上の単位法線ベクトルを表す。この様な問題に対して、次式に示す周波数領域境界積分方程式が成

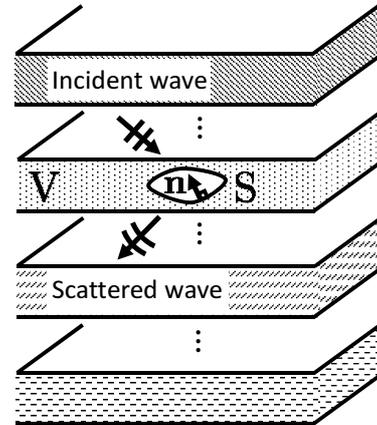


図1 積層構造を有する弾性体中に存在する散乱体

り立つ。

$$\alpha \tilde{u}_j(\mathbf{y}, \omega) = \tilde{u}_j^{\text{in}}(\mathbf{y}, \omega) + \int_S \tilde{U}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) \tilde{t}_i(\mathbf{x}, \omega) dS(\mathbf{x}) - \int_S \tilde{W}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) \tilde{u}_i(\mathbf{x}, \omega) dS(\mathbf{x}) \quad (1)$$

式(1)において、 ω は角周波数、 $\tilde{u}_j^{\text{in}}(\mathbf{y}, \omega)$ は入射波による変位の波動場を表す。また、 $\tilde{u}_i(\mathbf{x}, \omega)$ および $\tilde{t}_i(\mathbf{x}, \omega)$ は、境界における変位および表面力を表す。さらに、 α は自由項、 $\tilde{U}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega)$ はGreen関数、 $\tilde{W}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega)$ はそれに対応する二重層核を表している。

式(1)における境界Sを N_e 個の一定要素に離散化する。このとき、境界要素 S^N の重心位置 \mathbf{x}^N における境界値を $\tilde{u}_{N;i}(\omega)$ および $\tilde{t}_{N;i}(\omega)$ とすると式(1)は次式のように離散化できる。

$$\sum_{N=1}^{N_e} \{ \tilde{B}_{MN;ij}(\omega) \tilde{u}_{N;i}(\omega) - \tilde{A}_{MN;ij}(\omega) \tilde{t}_{N;i}(\omega) \} = \tilde{u}_{M;j}^{\text{in}}(\omega), \quad (M = 1, 2, \dots, N_e) \quad (2)$$

ここで、式(2)における $\tilde{A}_{MN;ij}(\omega)$ および $\tilde{B}_{MN;ij}(\omega)$ は影響関数と呼ばれ、次式で表される。

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{MN;ij}(\omega) &= \int_{S^N} \tilde{U}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^M, \omega) dS(\mathbf{x}) \\ \tilde{B}_{MN;ij}(\omega) &= \int_{S^N} \tilde{W}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^M, \omega) dS(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \delta_{MN} \delta_{ij} \end{aligned} \quad (3)$$

ただし、 δ_{ij} はクロネッカーのデルタを表す。

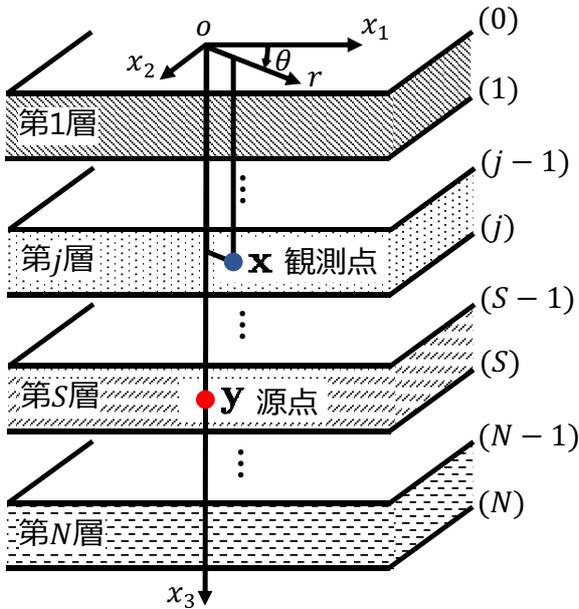


図2 Green関数の計算に用いる積層構造の概略

3. 反射・透過係数法に基づくGreen関数の計算

積層構造のGreen関数は式(3)で示した影響関数の計算を行う上で必要になる。本研究では、Hisadaによる積層構造のGreen関数の計算方法を採用した¹⁾²⁾。

Green関数の計算に用いる積層構造の概略を図2に示す。各層に対して上から順に1, 2, 3, ..., N, 各層の界面に対して上から順に(0), (1), (2), ..., (N)となるようにそれぞれ番号を与える。Green関数の計算には、図2に示すような円筒座標系を用いる。このとき、観測点は $\mathbf{x} = \{r, \theta, z\}^T$, 源点は $\mathbf{y} = \{0, 0, h\}^T$ と表現される。

図2に示すように観測点 \mathbf{x} が第j層に、源点 \mathbf{y} が第S層に含まれるとき、Green関数は次式で表される。

$$\mathbf{U}(r, \theta, z; h) = g(\theta) \int_0^\infty \{\mathbf{V}(z; h)b_1(r) + \mathbf{H}(z; h)b_2(r)\} dk \quad (4)$$

ここで、 $g(\theta)$ は三角関数、 k は波数の水平方向の成分、 b_i ($i = 1, 2$)は第一種Bessel関数によって構成される関数を表す。 \mathbf{V} および \mathbf{H} はそれぞれ次式によって表される。

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(z; h) &= \mathbf{E}^{PSV} \mathbf{\Lambda}^{PSV}(z) \mathbf{C}^{PSV}(h) \\ \mathbf{H}(z; h) &= \mathbf{E}^{SH} \mathbf{\Lambda}^{SH}(z) \mathbf{C}^{SH}(h) \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、 \mathbf{E} および $\mathbf{\Lambda}(z)$ は、解析条件に依存した係数行列および各層内の波の位相の変化を表している。また、 $\mathbf{C}(h)$ は各層内の波の振幅を表し、次式のように表現できる。

$$\mathbf{C}(h) = \begin{Bmatrix} \mathbf{C}_u^j(h) \\ \mathbf{C}_d^j(h) \end{Bmatrix} \quad (6)$$

式(6)において、上付き添字の j は観測点 \mathbf{x} を含む層に関する値であることを意味する。また、下付き添字の u は波

の進行方向が上向き(第1層へと向かう方向)であることを、下付き添字の d は波の進行方向が下向き(第N層へと向かう方向)であることを表している。 \mathbf{C}_u^j および \mathbf{C}_d^j は反射・透過係数法を用いて、以下の様に求めることができる。

$$\mathbf{C}_u^j(h) = \tilde{\mathbf{T}}_u^{(j)} \mathbf{C}_u^{j+1}(h), \quad \mathbf{C}_d^{j+1}(h) = \tilde{\mathbf{R}}_d^{(j)} \mathbf{C}_u^{j+1}(h) \quad (7)$$

$$\mathbf{C}_d^{j+1}(h) = \tilde{\mathbf{T}}_d^{(j)} \mathbf{C}_d^j(h), \quad \mathbf{C}_u^j(h) = \tilde{\mathbf{R}}_u^{(j)} \mathbf{C}_d^j(h) \quad (8)$$

式(7), (8)において、 $\mathbf{T}_u^{(j)}$, $\mathbf{R}_u^{(j)}$, $\mathbf{T}_d^{(j)}$, $\mathbf{R}_d^{(j)}$ は界面(j)における一般化反射・透過マトリクスである。式(7)と式(8)を用いることで、源点を含む層から順番に各層の \mathbf{C}_u^j および \mathbf{C}_d^j を求めることができる。

一般化反射・透過マトリクスは次式によって与えられる。震源より上側の層に対しては、

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{R}}_u^{(0)} &= \mathbf{R}_u^{(0)} \\ (j &= 0) \\ \tilde{\mathbf{T}}_u^{(j)} &= (\mathbf{I} - \mathbf{R}_d^{(j)} \tilde{\mathbf{R}}_u^{(j-1)})^{-1} \mathbf{T}_u^{(j)} \\ \tilde{\mathbf{R}}_u^{(j)} &= \mathbf{R}_u^{(j)} + \mathbf{T}_d^{(j)} \tilde{\mathbf{R}}_u^{(j-1)} \tilde{\mathbf{T}}_u^{(j)} \\ (j &= 1, 2, \dots, S-1) \end{aligned} \quad (9)$$

を用いる。これに対して、震源より下側の層に対しては、

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{R}}_d^{(N+1)} &= \mathbf{R}_d^{(N+1)} \\ (j &= N) \\ \tilde{\mathbf{T}}_d^{(j)} &= (\mathbf{I} - \mathbf{R}_u^{(j)} \tilde{\mathbf{R}}_d^{(j+1)})^{-1} \mathbf{T}_d^{(j)} \\ \tilde{\mathbf{R}}_d^{(j)} &= \mathbf{R}_d^{(j)} + \mathbf{T}_u^{(j)} \tilde{\mathbf{R}}_d^{(j+1)} \tilde{\mathbf{T}}_d^{(j)} \\ (j &= N-1, N-2, \dots, S) \end{aligned} \quad (10)$$

を用いる。式(9), (10)において $\mathbf{T}_u^{(j)}$, $\mathbf{R}_u^{(j)}$, $\mathbf{T}_d^{(j)}$, $\mathbf{R}_d^{(j)}$ は界面(j)における修正反射・透過マトリクスである。

反射・透過係数法において、界面(j)における修正反射・透過マトリクスは、第j層および第j+1層の影響のみを考慮している。一方、界面(j)における一般化反射・透過マトリクスは、第S層に対して界面(j)と同じ側にある全ての層の影響を組み合わせることによって構成されている。

4. おわりに

本稿では、積層構造におけるGreen関数を反射・透過係数法によって計算し、境界要素法に適用する手法を提案した。今後は、実際の層構造を対象とした波動散乱問題に対して本手法を適用し、その有効性を検証する予定である。

参考文献

- 1) Hisada, Y.: An efficient method for computing green's functions for a layered half-space with sources and receivers at close depths, *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol.84, No.5, pp.1456-1472, 1994.
- 2) Hisada, Y.: An efficient method for computing green's functions for a layered half-space with sources and receivers at close depths (Part 2), *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol.85, No.4, pp.1080-1093, 1995.