

# 動弾性有限積分法を用いた様々な異方性材料中の欠陥に対する弾性波動散乱解析

○群馬大学理工学研究院 学生会員 森亜也華  
 群馬大学理工学研究院 正会員 斎藤隆泰  
 東京工業大学大学院 正会員 廣瀬壮一

## 1. はじめに

近年、種々の構造物内部の欠陥の有無を調べる方法として非破壊検査法が重要視されている。しかしながら、例えばCFRP等の異方性材料中の欠陥を超音波を用いて非破壊検査しようとしても、音響異方性によって検査したい場所に実際に超音波が行き届いていないという問題が生じる。超音波を欠陥部分に到達させるために、まずは異方性材料中を弾性波が伝搬の様子を数値解析によりモデル化することが必要となる。そこで本研究では、2次元異方性弾性波動解析のための動弾性有限積分法<sup>1)2)</sup>(EFIT:Elastodynamic Finite Integration Technique)を開発する。以下では、解くべき問題とEFITの定式化について簡単にまとめ、数値解析結果を示すことで本手法の有効性について確認する。

## 2. 解くべき問題

異方性弾性波動問題について図1のような半径  $a$  の空洞を超音波探傷する解析モデルを考える。この固体の上面から超音波(弾性波)を送信し、材料中をどのように伝搬するかを調べるため、数値解析を行う。

物体の変位ベクトルを  $\mathbf{u}$ 、応力テンソルを  $\mathbf{T}$ 、物体力ベクトルを  $\mathbf{f}$  とする。このとき、異方性材料中を伝搬する波動は位置  $\mathbf{x}$ 、時刻  $t$  において、それぞれ次の運動方程式と構成関係式(フックの法則)を満足する。

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \nabla \cdot \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (1)$$

$$\mathbf{s} : \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} (\nabla \otimes \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \{\nabla \otimes \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\}^T) \quad (2)$$

ここで  $\mathbf{s}$  は4階の弾性コンプライアンステンソル、 $\mathbf{c}$  はその逆である。また、 $\rho$  は密度である。

## 3. EFIT法を用いた定式化

EFITでは波動方程式を図2(a)-(c)のように、スタッガード格子の微小四角形領域  $V$  で積分した後に離散化を行う必要がある。この点で同じ差分法であるFDTD法<sup>3)</sup>とは異なる。今、簡単のため物体力  $\mathbf{f}$  をゼロとおき、式(1)、(2)をそれぞれ積分し、ガウスの発散定理を用いれば、次の式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \mathbf{v} dV = \int_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} dS \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \mathbf{T} dV = \int_S \mathbf{c} \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{n} \otimes \mathbf{v} + \mathbf{v} \otimes \mathbf{n}) dS \quad (4)$$

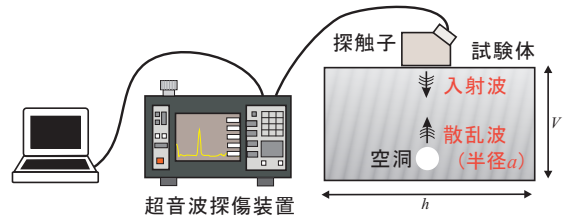


図1 超音波探傷実験

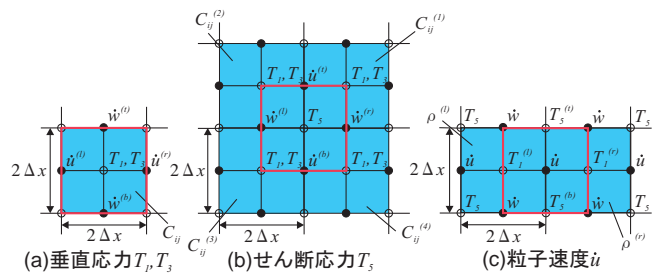


図2 各応力、粒子速度の積分セルと節点配置

ここで  $\mathbf{v} (= \partial \mathbf{u} / \partial t)$  は粒子速度とする。 $\mathbf{n}$  は、領域  $V$  (その境界は  $S$ ) から外に向く、法線ベクトルである。離散化の過程を明確にするため、式(3)、(4)を指標表記に書き直すと次式を得る。

$$\int_V \rho \dot{v}_i dV = \int_S T_{ij} n_j dS \quad (5)$$

$$\int_V \dot{T}_{kl} dV = \int_S c_{kl ij} v_i n_j dS \quad (6)$$

ただし、 $\dot{(\ )}$  は時間微分作用素である。今、直交座標系  $\{x_1, x_2, x_3\}$  における、 $(x_1, x_3)$  の2次元面内波動場を考え、 $x_2$  方向の変化分は無視する。主軸を  $(x_1, x_2, x_3)$  に一致させ、式(5)において  $x_1, x_3$  方向の粒子速度をそれぞれ  $\dot{u}, \dot{w}$  とすると

$$\int_V \rho \dot{u} dV = \int_S (T_1 n_1 + T_5 n_3) dS \quad (7)$$

$$\int_V \rho \dot{w} dV = \int_S (T_5 n_1 + T_3 n_3) dS \quad (8)$$

の2つの式を得る。ここで、応力  $T_1, T_3$  はそれぞれ  $x_1, x_3$  方向の垂直応力であり、 $T_5$  はせん断応力である。また、式(6)からも次の3つの式を得る。

$$\int_V \dot{T}_1 dV = \int_S (C_{11} \dot{u} n_1 + C_{13} \dot{w} n_3) dS \quad (9)$$

$$\int_V \dot{T}_3 dV = \int_S (C_{13} \dot{u} n_1 + C_{33} \dot{w} n_3) dS \quad (10)$$

$$\int_V \dot{T}_5 dV = \int_S C_{55}(\dot{u}_3 + \dot{w}_1) dS \quad (11)$$

ただし、弾性定数テンソル  $c_{ijkl}$  の表記には Voigt 表記を用いた。これを用いると、 $c_{1112} = C_{16}$  等と表せる。

図 2(a)-(c) より、積分領域を  $V$  として 1 辺の長さが  $2\Delta x$  の正方形のセルを考える。体積積分においてはセル内で物理量が一定、面積積分では境界上で物理量が一定と仮定する。ここで例えば、構成関係式 (9) を空間、時間に対して離散化すると、

$$\frac{2\Delta x}{2\Delta t} [T_1^{n+\frac{1}{2}} - T_1^{n-\frac{1}{2}}] = -C_{11}[\dot{u}^{(r)} - \dot{u}^{(l)}]^n - C_{13}[\dot{w}^{(t)} - \dot{w}^{(b)}]^n \quad (12)$$

を得る。ただし、 $\Delta t$  は時間増分、上付きの ( ) はセル上の節点位置 ( $r$ :右,  $l$ :左,  $t$ :上,  $b$ :下) を表している。図 2(a) より、式 (10) の応力  $T_3$  も同様に離散化できる。一方、図 2(b) より節点配置が異なる  $T_5$  に対する式 (11) を離散化すると、

$$\frac{2\Delta x}{2\Delta t} [T_5^{n+\frac{1}{2}} - T_5^{n-\frac{1}{2}}] = -\bar{C}_{55}[\dot{u}^{(t)} - \dot{u}^{(b)} + \dot{w}^{(r)} - \dot{w}^{(l)}]^n \quad (13)$$

を得る。なお、EFIT では弾性定数は垂直応力のセルで定義されるため、上式のようにせん断応力のセルを離散化するときには、次の弾性定数の平均化処理が必要である。

$$\bar{C}_{ij} = \frac{1}{4}[C_{ij}^{(1)} + C_{ij}^{(2)} + C_{ij}^{(3)} + C_{ij}^{(4)}] \quad (14)$$

本研究では、解析対称となる弾性体が均質であるため平均化処理はさほど考える必要はないが、非均質の材料の場合は隣同士のセルで弾性定数が異なるので、平均化処理がより重要になると思われる。次に運動方程式 (7) を離散化すると、次式を得る。

$$\rho \frac{2\Delta x}{2\Delta t} [\dot{u}^{n+1} - \dot{u}^n] = -[T_1^{(r)} - T_1^{(l)} + T_5^{(t)} - T_5^{(b)}]^{n+\frac{1}{2}} \quad (15)$$

式 (14) で述べた弾性定数の平均化同様、密度  $\rho$  も図 2(c) より、垂直応力の積分セルで与えられているので、以下のように平均化処理を行う必要がある。

$$\bar{\rho} = \frac{1}{2}(\rho^{(r)} + \rho^{(l)}) \quad (16)$$

式 (8) も式 (7),(16) と同様に離散化できる。以上で、異方性弾性波動問題に対する EFIT の定式化を示せた。

#### 4. 解析結果

等方性鋼材、オーステナイト系鋼材、グラファイトエポキシを対象として、図 1 に対する弾性波動解析を行った。その結果をそれぞれ図 3(a)-(c) に示す。ただし、入射波は 2MHz の正弦波とし、図 1 で  $h=10\text{cm}$ ,  $V=5\text{cm}$ ,  $a=3\text{mm}$  とした。参

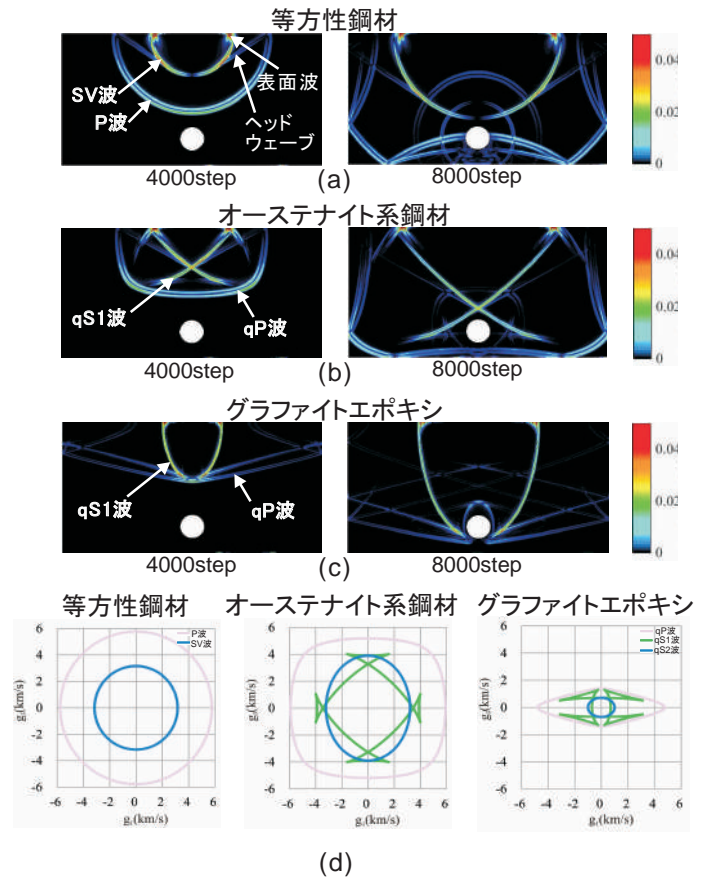


図 3 群速度曲線と解析結果

考のため、それぞれの群速度曲線を図 3(d) に示した。図 3(a)-(c) より、いずれの材料の場合も、図 3(d) の群速度曲線に従って弾性波が伝搬していることが確認できる。等方性鋼材中の弾性波はまず縦波である P 波が伝搬し、その後、横波である SV 波が伝搬する。P 波と SV 波ともに等方に弾性波が伝搬する様子が見て取れる。また、表面波やヘッドウェーブの存在も確認できる。一方、オーステナイト系鋼材では図 3(b) より、qP 波 (擬似縦波) は等方ではなく四角形状で伝搬し、qS1 波 (擬似横波) は交差して伝搬することがわかる。また、図 3(c) のグラファイトエポキシでも qP 波は等方でなく横長に伝搬し、qS1 波は縦長に伝搬する。いずれの材料に対する場合も、空洞周辺の弾性波動場を可視化することができた。

#### 5. まとめ

2次元異方性弾性波動解析のための EFIT を開発した。異方性材料に対する弾性波動解析を行い、結果の妥当性を示した。今後は、EFIT による数値解析結果を援用した非破壊診断を行う予定である。

#### 参考文献

- 1) P. Fellingner, R. Marklein, K.J. Langenberg and S. Klaholz: Numerical modeling of elastic wave propagation and scattering with EFIT-elastodynamic finite integration technique, *Wave Motion*, Vol.21, pp. 47-66, 1995.
- 2) 中畑和之, 廣瀬壮一: 非均質異方性材料中の弾性波伝搬解析のためのイメージベース EFIT の開発と非破壊検査への応用, 応用力学論文集, Vol.12, pp.163-170, 2009.
- 3) 佐藤雅弘著: FDTD 法による弾性振動・波動の解析入門, 森北出版株式会社, 2003.